

マルコフ確率場モデルを用いたベイズ画像解析に対する 平均操作の影響

Effects of averaging procedure on Bayesian image analysis using Markov random field models

坂本浩隆^{*1} 中西(大野)義典^{*1*2} 岡田真人^{*1*3}
Hiroataka Sakamoto Yoshinori Nakanishi-Ohno Masato Okada

^{*1}東京大学 大学院新領域創成科学研究科
Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

^{*2}日本学術振興会 特別研究員
Research Fellow of Japan Society for the Promotion of Science

^{*3}理化学研究所 脳科学総合研究センター
RIKEN Brain Science Institute

We investigate the influence of averaging procedure on Bayesian image analysis using Markov random field (MRF) models. Averaging procedure involves a trade-off relation: the number of image data sets become smaller as averaging procedure is taken to reduce the strength of measurement noise. We evaluate effects on image restoration, and hyperparameter (HP) estimation which reveals the smoothness and noise strength of images. First, we show that the performance of image restoration with a given HP does not depend on averaging procedure. Next, we show that, from the viewpoint of HP estimation, the reliability of HP estimates decreases due to averaging procedure, and then the HP value estimated from non-averaged data enhances the performance of image restoration.

1. 序論

画像解析をする際、前処理としてデータを平均すべきか否かは重要な問題である。データを平均すると、一枚当たりのノイズは低減され、鮮明な画像を解析に用いることができる。一方で、データを平均することにより情報の量は減るため、画像解析には不利のようにも思える。画像の枚数と精度のトレードオフは、画像データの連なりである動画データを限られた時間で取得する際に、フレームレートをどのように設定すべきかという問題とも深く関連する。本研究では、マルコフ確率場(MRF)モデルを用いたベイズ画像解析に対して、平均操作が与える影響について議論する。

MRFモデルとは、画像や観測ノイズの性質に基づいて画像解析を行うための確率モデルである[Geman 84]。画像修復をはじめとして多くの画像解析の手法が開発されている。MRFモデルの利点はベイズ推論の枠組みを活用できる点である[Bishop 06]。MRFで画像修復を行うときに、画像の滑らかさや観測ノイズの強度を表すハイパーパラメータ(HP)の調節が重要であるが、ベイズ推論を用いることにより、このHPを画像データから客観的に決定することが可能である[Pryce 95]。それだけでなく、ベイズ事後分布そのものを用いることにより、推定したHP値の不確かさを評価することも可能である。推定値の不確かさを評価する手法は自然科学で重要な役割を担う。特にMRFモデルは拡散方程式との数理的対応から、自然科学の画像データ解析に適したモデルであることが指摘されている[Nakanishi 14]。

本研究では、MRFモデルによるベイズ推定を利用した画像解析の手法として画像修復とHP分布推定を扱い、これらに対する平均操作の影響を評価し、画像の観測回数と観測精度のトレードオフを議論する。まず、HPを既知とする画像修復に対しては画像の平均操作が影響を与えないことをエネルギー関数を解析的に調べることにより示す。また推定したHPの値の信頼度や、そのHP値を用いて画像修復を行ったときの性能が、平均操作によって低下することを数値実験から示す。

2. 定式化

2.1 マルコフ確率場モデル

原画像 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ を観測して画像データ $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ を得る過程を、MRFモデルによって定式化する[Geman 84]。ここで N は画素数である。簡単のため、これ以降1次元画像について述べるが、2以上の次元を持つ画像についても同様の定式化が成り立つ。

まず、1枚の画像データを取得する場合を考える。原画像の各画素値 u_i は観測ノイズ n_i が加わって、観測画像の画素値 $v_i = u_i + n_i$ として記録されるものとする。観測ノイズとして、平均0、分散 b のガウスノイズが各画素に対して独立に加わるものとする、観測画像 \mathbf{v} は確率分布

$$P_1(\mathbf{v}|\mathbf{u}, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{2b} \sum_{i=1}^N (v_i - u_i)^2\right], \quad (1)$$

に従う。ノイズの分散 b はMRFモデルのHPである。

次に、複数枚の画像データを取得する場合を考える。原画像は観測中に時間変化しないものとし、 T 枚の画像データ $\{\mathbf{v}^t\}_{t=1}^T = \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^T\}$ を同一の原画像 \mathbf{u} に対して独立に観測することを仮定する。各画像データは式(1)の確率分布に従うとすると、 T 枚の画像データ $\{\mathbf{v}^t\}_{t=1}^T$ が従う確率分布は、

$$P_T(\{\mathbf{v}^t\}_{t=1}^T|\mathbf{u}, b) = \prod_{t=1}^T P_1(\mathbf{v}^t|\mathbf{u}, b), \quad (2)$$

により与えられる。各観測画像のそれぞれの画素 v_i^t は平均 u_i 、分散 b の正規分布 $\mathcal{N}(u_i, b)$ に従う。

自然科学の対象となる現象には空間的な連続性がしばしば想定される。このとき観測画像の画素値もまた連続性を持つ。隣接する画素値が近いことをガウスMRFモデルを用いて表すと、原画像 \mathbf{u} に関する事前分布は

$$P_{\text{pri}}(\mathbf{u}|a) = \frac{1}{Z_{\text{pri}}(a)} \exp\left[-\frac{1}{2a} \sum_{i=1}^N (u_i - u_{i+1})^2\right], \quad (3)$$

により与えられる。ここで、 $u_{N+1} = u_1$ とし、原画像に対して周期的境界条件を仮定した。 Z_{pri} は規格化因子である。 a は画像の滑らかさを表す HP であり、値が小さいほど原画像が滑らかであることを示す。

ガウス MRF モデルにおける画像修復や HP 推定に対して、離散フーリエ変換を用いた解析が有効であることが知られている [Nishimori 00, Nakanishi 14]。変数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ についての離散フーリエ変換を

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N x_i \exp\left[\frac{2\pi i(i \cdot k)}{N}\right] \quad (4)$$

とする。ただし i は虚数単位である。式 (1) と (2) により表される確率分布に対して画像のフーリエ変換を用いると

$$P_T(\{\tilde{\mathbf{v}}^t\}_{t=1}^T | \tilde{\mathbf{u}}, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\right)^{NT} \exp\left[-\frac{1}{2b} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^N (\tilde{v}_k^t - \tilde{u}_k)^2\right], \quad (5)$$

と書ける。原画像の事前分布は、二次形式で表すと

$$P_{\text{pri}}(\mathbf{u}|a) = \frac{1}{Z_{\text{pri}}(a)} \exp\left[-\frac{1}{2a} \mathbf{u}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{u}\right], \quad (6)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{\Lambda}$ は N 次正方行列で、その成分 Λ_{ij} は $i = j$ のとき 2、 i が j と隣接しているとき -1 、その他は 0 である。 $\mathbf{\Lambda}$ をフーリエ基底行列によって対角化して得られる行列 $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ の成分は $\Lambda_{kl} = \lambda_k \delta_{kl}$ と書ける。ただし、 $\lambda_k = 2 - 2\cos\left[\frac{2\pi k}{N}\right]$ である。また、式 (3) で表される原画像の事前分布に対して画像のフーリエ変換を用いると

$$P_{\text{pri}}(\tilde{\mathbf{u}}|a) = \prod_{k=1}^N \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_k}{2\pi a}} \exp\left[-\frac{1}{2a} \lambda_k |\tilde{u}_k|^2\right] \right\}, \quad (7)$$

と書ける。フーリエ変換された原画像の事前分布と観測画像の確率分布は、各フーリエ成分に関して独立な正規分布と表せるので、解析に適したモデルである。

2.2 平均操作

複数枚の画像データが得られた時に前処理として平均操作を行ったとき、画像データが従う確率分布がどのように変化するかを考える。簡単のため 2 枚の画像データ $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\}$ から、1 枚の平均画像を得る場合を考える。平均画像の各画素は $m_i^1 = (v_i^1 + v_i^2)/2$ で与える。この時、平均画像 \mathbf{m}^1 の従う確率分布 $P_{2 \rightarrow 1}(\mathbf{m}^1 | \mathbf{u}, b)$ は正規分布 $N(u_i, b/2)$ により与えられる。ノイズ分散 b で観測された 2 枚の画像を平均して得られる平均画像は、半分のノイズ分散 $b/2$ で観測された画像と同じように見える。ただし、ノイズ分散が減るだけでなく、画像の枚数も減るために、非自明なトレードオフがあると考えられる。同様に、 T 枚の画像を 1 枚に平均した時の平均画像の各画素は正規分布 $N(u_i, b/T)$ に従う。

一般には、 T 枚の画像データを S 組に分けて、それぞれの組に属している T/S 枚の画像データを平均して、合計で S 枚の平均画像 $\{\mathbf{m}_i^s\}_{s=1}^S$ を得ることが考えられる。各平均画像のそれぞれの画素 m_i^s は正規分布 $N(u_i, bS/T)$ に従うので、 S 枚の平均画像 $\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S$ の従う確率分布は

$$P_{T \rightarrow S}(\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S | \mathbf{u}, b) = \prod_{s=1}^S \prod_{i=1}^N \left[\sqrt{\frac{T}{2\pi bS}} \exp\left[-\frac{T}{2bS} (m_i^s - u_i)^2\right] \right], \quad (8)$$

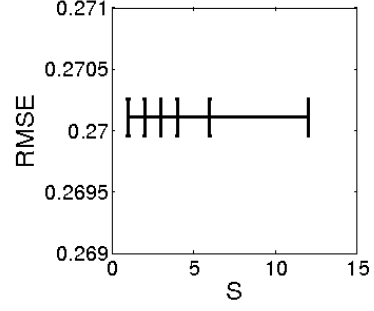


図 1: 真の HP を用いた場合の修復画像に対する原画像の RMSE. 100 組の独立な観測画像の組に対する計算結果の平均値を示す。画像は 2 次元画像。真のパラメータは $(a_0, b_0, T, N) = (1, 1.2, 12, 128^2)$ 。

により与えられる。フーリエ変換された平均画像の確率分布は、式 (4) を用いて、

$$P_{T \rightarrow S}(\{\tilde{\mathbf{m}}^s\}_{s=1}^S | \tilde{\mathbf{u}}, b) = \prod_{s=1}^S \prod_{k=1}^N \left[\sqrt{\frac{T}{2\pi bS}} \exp\left[-\frac{T}{2bS} (\tilde{m}_k^s - \tilde{u}_k)^2\right] \right], \quad (9)$$

と書ける。式 (9) から、分散の逆数で表される平均画像の精度 T/bS に着目すると、平均操作によって画像の枚数 S が減少することで、精度が向上することが分かる。すなわち、平均画像の枚数と平均画像の精度にはトレードオフの関係がある。

3. 画像修復

MRF モデルに基づく画像解析では、ベイズ推定の枠組みが有用である [Bishop 06]。まず、ベイズ推定を用いた画像修復について説明する。

ここでの画像修復の目的は、真の HP の値 a_0, b_0 が既知である場合に、 S 枚の平均画像 $\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S$ から、原画像に近い修復画像を推定することである。平均画像が与えられたもとの原画像の事後確率は、ベイズの定理を用いて、

$$P(\mathbf{u} | \{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S, a_0, b_0) = \frac{P_{T \rightarrow S}(\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S | \mathbf{u}, b_0) P_{\text{pri}}(\mathbf{u} | a_0)}{\int d\mathbf{u} P_{T \rightarrow S}(\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S | \mathbf{u}, b_0) P_{\text{pri}}(\mathbf{u} | a_0)} \quad (10)$$

により与えられる。式 (3), (8) を代入して、

$$P(\mathbf{u} | \{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S, a_0, b_0) \propto \exp\left[-E(\mathbf{u} | \{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S, a_0, b_0)\right], \quad (11)$$

が得られる。ただし E は

$$E(\mathbf{u} | \{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S, a_0, b_0) = \frac{T}{2b_0 S} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N (m_i^s - u_i)^2 + \frac{1}{2a_0} \sum_{i=1}^N (u_i - u_{i+1})^2, \quad (12)$$

により与えられ、エネルギー関数と呼ぶことにする。画像修復では、最大事後確率 (MAP) 推定を用いる。このとき、修復画像 \mathbf{u}^{MAP} は、事後確率を最大化することによって与えられる。式 (11) より、事後確率の最大化とエネルギー関数の最小化は等価であるので、以降エネルギー関数について考える。簡単のため、観測画像の枚数を $T = 2$ とする。2 枚の画像を平均

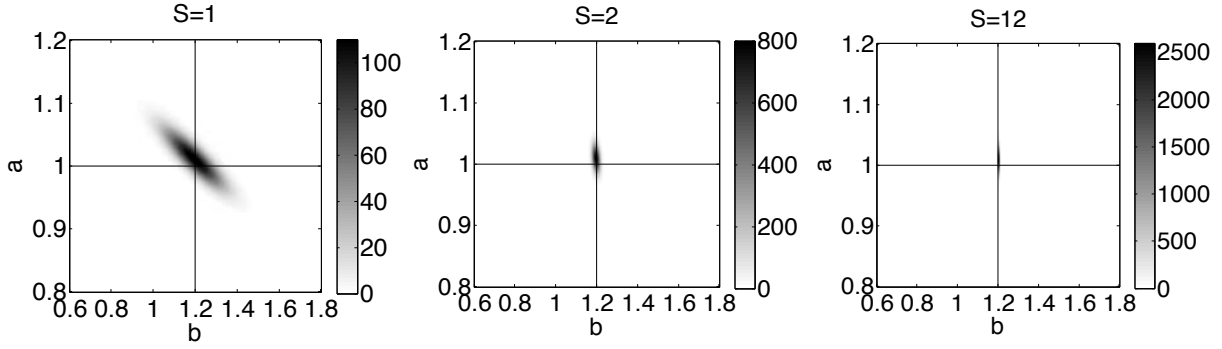


図 2: 生成した平均画像から推定された HP 事後分布. 真のパラメータは $(a_0, b_0, T, N) = (1, 1.2, 12, 128^2)$ 左列は $S = 1$ の結果, 中列は $S = 2$ の結果, 右列は $S = 12$ の結果.

すると, 平均画像 $m_i^{s=1} = (v_i^{t=1} + v_i^{t=2})/2$ なので, エネルギー関数 $E(\mathbf{u}|\mathbf{m}^{s=1}, a_0, b_0)$ は

$$E(\mathbf{u}|\mathbf{m}^{s=1}, a_0, b_0) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{2}{2b_0} \left(\frac{v_i^{t=1} + v_i^{t=2}}{2} - u_i \right)^2 + \frac{1}{2a_0} (u_i - u_{i+1})^2 \right], \quad (13)$$

と書ける. 一方, 2 枚の観測画像をそのまま用いる場合, 平均画像は観測画像と等しいので, エネルギー関数 $E(\mathbf{u}|\mathbf{v}^{t=1}, \mathbf{v}^{t=2}, a_0, b_0)$ は

$$E(\mathbf{u}|\mathbf{v}^{t=1}, \mathbf{v}^{t=2}, a_0, b_0) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{2}{2b_0} \left(\frac{v_i^{t=1} + v_i^{t=2}}{2} - u_i \right)^2 + \frac{1}{2a_0} (u_i - u_{i+1})^2 + \frac{2}{2b_0} \left(\frac{v_i^{t=1} - v_i^{t=2}}{2} \right)^2 \right], \quad (14)$$

と書ける. 式 (14) の右辺第 3 項は u_i に依存しないので, 2 つのエネルギー関数は \mathbf{u} に関して等価である. したがって, HP の値が既知の場合に, 画像修復の性能は平均操作の有無によらないことがわかる. 一般の S に関して同様に, エネルギー関数が \mathbf{u} に関して等価なので, この時修復画像は平均操作に依存しないことがわかる.

MAP 推定を用いたガウス MRF モデルの画像修復は, フーリエ変換を用いて厳密解が得られることが知られている [Nishimori 00]. 離散フーリエ変換を用いると, エネルギー関数 $E(\mathbf{u}|\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S, a_0, b_0)$ は

$$E(\mathbf{u}|\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S, a_0, b_0) = \sum_{k=1}^N \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_k}{a_0} + \frac{T}{b_0} \right) \tilde{u}_k - \frac{a_0}{\lambda_k} \left(\frac{a_0}{\lambda_k} + \frac{b_0}{T} \right)^{-1} \mu_k \right]^2, \quad (15)$$

と計算される. ただし, $\mu_k = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \tilde{m}_k^s = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{v}_k^t$ である. 式 (15) が最小化されるのは

$$\tilde{u}_k^{\text{MAP}} = \frac{a_0}{\lambda_k} \left(\frac{a_0}{\lambda_k} + \frac{b_0}{T} \right)^{-1} \mu_k \quad (16)$$

のときであり, これを逆離散フーリエ変換して, 実空間での MAP 推定値を得る.

HP が既知の場合, 画像修復に対して平均操作が影響を与えないことを数値実験から確認する. 式 (2), 式 (3) に従って観測画

像を生成する. 画像生成に用いる MRF モデルの HP は $a_0 = 1, b_0 = 1.2$ とする. 画像は 2 次元画像を用い, 画素数は $N = 128$ とする. 生成した画像の枚数は $T = 12$ とし, 12 枚の画像から平均画像を作成した. 平均画像の枚数を $S = 1, 2, 3, 4, 6, 12$ とした場合についてそれぞれ画像修復を行い, その性能を評価した. 画像修復の性能を評価するため, 修復画像と原画像との平均二乗誤差 (RMSE) を計算する. 修復画像 \mathbf{u}^{MAP} と原画像 \mathbf{u} の間の RMSE は, $\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i^{\text{MAP}} - u_i)^2}$ により定義する. 図 1 は修復画像と原画像との RMSE を 100 組の独立な平均画像それぞれについて計算し, その平均値と標準偏差を示したものである. 図 1 から, 真の HP を用いた場合, 平均操作を行っても RMSE の平均値, 標準偏差ともに変化せず, 画像修復の性能が画像の平均操作によらないことが確認できる. HP 既知の場合, 観測画像を平均して処理することで性能に影響を与えず記憶容量や計算コストを削減できる.

4. ハイパーパラメータ推定

もう一つの画像処理の例として, HP 推定について議論を行う. 画像修復では, HP は既知であるとして扱った. 一般には HP は未知であり, 画像処理の性能向上のため推定が行われる [Pryce 95]. また HP は画像の性質を示すそれ自体重要なパラメータでもある [Nakanishi 14]. 特に MRF モデルの HP は, 拡散係数との対応があることが示されており, 観測画像から推定する必要がある.

MRF モデルは確率モデルであるため, その HP 推定はベイズ推定の枠組みによって行うことができる [Bishop 06]. S 枚の平均画像から, $\text{HP}(a, b)$ の推定を行う. 平均画像が与えられたもとの HP の事後分布 $P(a, b|\{\bar{\mathbf{v}}^s\}_{s=1}^S)$ は, ベイズの定理から

$$\begin{aligned} P_S(a, b|\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S) &= \frac{P(a, b, \{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S)}{P(\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S)} \\ &\propto P(a, b, \{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S) \\ &= P(\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S|a, b)P(a, b) \end{aligned} \quad (17)$$

と書き換えられる. HP の事前分布を一様分布と仮定すると, 式 (17) は,

$$P_S(a, b|\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S) \propto \int d\mathbf{u} P_{T \rightarrow S}(\{\mathbf{m}^s\}_{s=1}^S|\mathbf{u}, b) P_{\text{Pri}}(\mathbf{u}|a) \quad (18)$$

となる. 離散フーリエ変換を用いることで, 多重積分をフーリエ積分ごとの積の形でできる [Nakanishi 14]. 積分計算は全てガウス積分によって厳密に行うことができる. 式 (18) は, 式

(7) と式 (9) を用いて書き換えられ、解析解

$$P_S(a, b | \{\tilde{m}_k^s\}_{s=1}^S) \propto \prod_{k=1}^N \left[\sqrt{\frac{1}{S}} \left(\frac{1}{\frac{a}{\lambda_k} + \frac{b}{T}} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{a}{\lambda_k} + \frac{b}{T}} \right) |\mu_k|^2 \right] \right] \times \left\{ \sqrt{\frac{T}{bS}} \exp \left[-\frac{T}{2bS} \eta_k \right] \right\}^{S-1}, \quad (19)$$

が得られる。ここで、 $\eta_k = \frac{1}{S-1} \sum_{s=1}^S |\tilde{m}_k^s - \mu_k|^2$ で表される平均画像の不偏分散である。式 (19) から、HP 事後分布の厳密解は S に依存し、平均操作に影響を受けることがわかる。

図 2 は式 (19) から得た HP の事後分布である。画像は 2 次元画像とし、画素数は $N = 128^2$ 、真の HP は $(a_0, b_0) = (1, 1.2)$ とした。観測画像の枚数は $T = 12$ とした。図 2 に示すように、推定された HP の分布の広がり、平均画像の枚数が増えるにしたがって小さくなる。分布の広がり、データの信頼度を表すため、平均操作はデータの信頼度を低下させる事がわかる。

MAP 推定値のばらつきを確認するため、図 3 内の実線で 100 組の独立に生成した画像の組から推定した MAP 推定値の平均値を示す。MAP 推定のばらつきを表すエラーバーは平均値の標準偏差であり、平均画像の枚数 S が増えるごとに小さくなる。また図 3 から、推定される HP の値は平均操作によるバイアスを持たない。HP の真値が未知の場合、HP の推定値を用いて画像修復を行うことを考えると、MAP 推定値がばらつくことによって画像修復は影響を受けると考えられる。図 4 に示すように、MAP 推定値を用いて画像修復を行うと、修復性能は平均操作によって低下する。MAP 推定値のばらつきが特に大きい場合には、画像修復の性能が大きく影響を受けることがわかる。平均操作によって画像処理の性能が低下する場合、出来る限り観測画像を保持する必要がある。

5. 考察

ベイズ事後分布の厳密解に基づく解析と数値実験から、HP が既知の場合、画像修復の性能は平均操作の有無によらないが、HP 推定を伴うような画像解析では、平均操作を行うと却って性能が低下することが分かった。本研究で取り扱った HP は、式 (1), (3) に示すように、原画像の隣接画素値の差に関する分散や観測ノイズの分散であり、平均操作により分散に関する情報が失われるために HP 推定の性能が低下すると考えられる。

本研究で得られた結果は、式 (1) に示すように、観測ノイズがガウス性を満たす場合に適用される。例えば観測の際の露光時間が極端に短く、ノイズがポワソン性を満たす場合には、必ずしも平均操作により画像解析の性能が悪化するとは限らない。また、式 (2) に示すように、原画像は観測中に変化しない場合を取り扱ったが、動的な系を対象とする場合に画像・動画解析に平均操作がどのように影響するかは興味深い。このように、現象や観測に関する時間スケールと平均操作との関連を調べることは今後の課題である。

6. 結論

本研究では、平均操作が画像処理に対して与える影響を調べた。はじめに、MRF モデルを用いて観測画像の生成過程を定式化し、平均操作を定義した。次に、ベイズ推定の枠組みを用いて画像修復と HP 推定の解析を行い、それぞれについて数値実験を行った。HP 既知の場合の画像修復では、エネルギー関数の解析と数値実験から、修復画像は平均操作によらないことが示された。一方 HP 推定では、推定された HP の同時事後確率分布について、平均操作によるバイアスはなく、推定の信

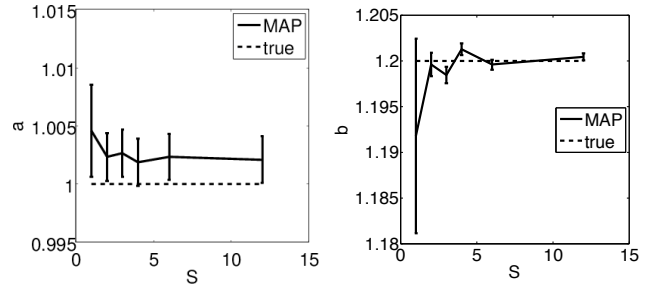


図 3: 画像は 2 次元画像、真のパラメータは $(a_0, b_0, T, N) = (1, 1.2, 12, 128^2)$ 実線は 100 組の独立な観測画像の組からそれぞれ計算した値の平均値である。点線は真値である。左は a についての結果であり、右は b についての結果である。

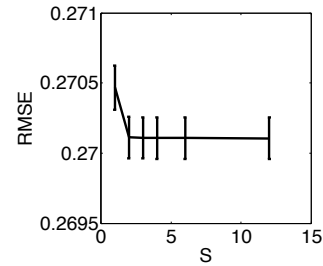


図 4: HP 推定値を用いた修復画像に対する原画像の RMSE. 100 組の独立な観測画像の組に対する計算結果の平均値を示す。画像は 2 次元画像、真のパラメータは $(a_0, b_0, T, N) = (1, 1.2, 12, 128^2)$ 。

頼度は平均操作によって低下した。また、HP の推定値を用いた画像修復の性能は、平均操作によって低下した。

以上の結果から、HP が既知の場合は画像を平均して処理することで、記憶容量や計算コストを削減できる一方、HP が未知の場合には、平均操作によって画像解析の性能が低下するため、出来る限り観測画像を保持する必要がある。今後の課題として、対象となる現象や観測の時間スケールと平均操作との関連を調べる事が重要である。

参考文献

- [Geman 84] Geman, S. and Geman, D.: Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.PAMI-6, pp.721–741 (1984).
- [Bishop 06] Bishop, C.M.: *Pattern Recognition and Machine Learning*, (New York: Springer) (2006).
- [Pryce 95] Pryce, J.M. and Bruce, A.D.: Statistical mechanics of image restoration, J. Phys. A: Mathematical and General, vol.28, no.3, pp.511–532 (1995).
- [Nakanishi 14] Nakanishi-Ohno, Y., Nagata, K., Shouno, H. and Okada, M.: Distribution estimation of hyperparameters in Markov random field models, J. Phys. A: Mathematical and Theoretical. vol.47, no.4, pp.045001-1–045001-14 (2014).
- [Nishimori 00] 西森秀稔.:有限温度の画像修復 (多体問題としての情報処理-統計力学と情報科学の接点-, 研究会報告). 物性研究, vol.73, no.5, pp.850-857 (2000).