

階層的確率モデルを用いたネットワーク分析手法

Network Analysis based on a Hierarchical Probabilistic Model

広瀬 俊亮 *¹ 神津 友武 *¹
Shunsuke Hirose Tomotake Kozu

*¹有限責任監査法人トーマツ デロイトアナリティクス
Deloitte Analytics, Deloitte Touche Tohmatsu LLC.

We consider the task of simultaneously deriving matrices representing typical structure of a set of input matrices, and constructing low-dimensional representations of the derived matrices. By solving this task, we can find typical structure from a set of networks represented as positive semidefinite matrices such as covariance matrices and correlation matrices. In this paper, we propose a solution, whose key ideas are: (1) introducing a probabilistic model with hierarchical latent variables, (2) conducting automatic relevance determination by employing variational bayesian inference for model estimation, and (3) constructing positive semidefinite matrices representing typical structure of the input matrices by using the estimated model.

1. はじめに

Web のリンク関係や SNS ユーザーの関係等といった要素間の関係性の分析は、データマイニングの重要な応用の一つである。要素間の関係性の分析は、要素をノード、要素対の関係をリンクとみなすことでネットワーク分析と言い換えられる。ネットワーク分析においては通常、複数のネットワーク (要素と要素対の関係性の集合) が観測される。例えば、Web ページのリンク関係が時間と共に変化し、それらが一定の時間間隔で観測される。このような場合に、観測データの特徴を抽出する手法を考えることは有用である。

そこで本稿では以下の二つの特徴抽出について考える。第一に、観測された複数ネットワークを表す典型的な構造 (代表的なネットワーク) を複数抽出すること。第二に、その代表的なネットワークの低次元表現を構築することである。ネットワークは行列を用いて表される。この為、第一の問題は観測行列を少数の代表的な行列で表すことに対応し、第二の問題は代表的な行列を低次元化することに対応する。これらの問題を解くことで、データの特徴抽出とデータの圧縮を実現できる。

本稿では、これらの問題を解く際に以下の二つを要請する。第一に、代表的な行列の数とそれらを低次元化する際の次元が自動的に決定されることである。複雑な関係性を持つネットワークの性質が予め分かる場合は少ないので、この要請が必要となる。第二に、入力行列が半正定である場合に出力行列も半正定となることである。なぜならば、ネットワークを表す行列として相関係数行列、共分散行列、拡散カーネル等の半正定行列が用いられ、半正定性が保存される方が望ましい場合が多いからである。例えば、カーネル法の前処理として上記の問題を考える場合、出力行列が半正定 (カーネル) でないと困る。

本稿では、これらの要請を満たすような上記の問題の解法 (行列の特徴抽出手法) を提案する。技術的な要点は以下の三つである。第一に、観測行列に対して階層的な隠れ変数を持つ確率分布を導入することで、観測行列の特徴とその中のブロック構造を同時にモデル化する。行列の一つのブロックから一つの行列要素を生成することで、低次元行列を構成できる。第二

連絡先: 広瀬俊亮, 有限責任監査法人トーマツ デロイトアナリティクス, shunsuke.hirose@tohatsu.co.jp

*¹ 本研究の内容は有限責任監査法人トーマツの公式見解を示すものではありません

に、変分ベイズ推定を用いて分布を推定することで、モデルの自由度 (行列の数と次元) を自動的に決定する。第三に、分布の推定結果を用いて、半正定性が保証されるように代表的な行列とその低次元表現を構築する。

1.1 関連研究

自動的に自由度を決定する方法として、変分ベイズ推定 [Attias 99, Corduneanu 01] が挙げられる。変分ベイズ推定は、周辺対数尤度を最大化することで確率分布の自由度を自動的に決定する推定手法である。本稿ではこの手法を用いてモデルの自由度を自動的に決定した。

複数行列を入力としてそれらに共通するブロック構造を抽出する手法が [Maehara 11] で提案されている。この手法は行列のブロック対角化を目的としており、本稿で扱うブロック化とは異なる。行列をブロック化する手法としては、無限関係モデル [Kemp 06] やクロスアソシエーション [Chakrabarti 04] 等が挙げられる。これらを用いるとブロック数も含めて自動的にブロック化を実行できる。ただし、行列要素が離散値に制限されるので、連続値を入力として半正定性を保存したいという本稿の問題に直接適用するのは難しい。

次章以後、本稿は以下のように構成される。2. で解くべき問題を整理する。3. で提案手法について説明する。4. で実験結果を示す。5. で結論を示す。

2. 問題設定

半正定行列が複数観測されているとする。観測された行列全体を $\mathcal{K} = \{K_t\}_{t=1}^T$ とし、個々の行列を添字 t で表す。各行列の次元は一定であるとし、次元を D と表す。

これらを入力として、本稿では以下の二つの問題を考える。第一に、入力行列の特徴を表す行列の抽出である。観測行列の特徴を表す行列を $\bar{K} = \{\bar{K}_i\}_{i=1}^L$ とし、以下これらの特徴行列と呼ぶことにする。このとき、特徴行列の成分と数 ($= L$) を自動的に決めたい。

第二に、特徴行列の低次元表現の導出である。各特徴行列に対応する低次元行列を $\bar{K}^c = \{\bar{K}_i^c\}_{i=1}^L$ と表す。低次元行列の次元は特徴行列毎に異なるとし、その次元を $\{S_i\}_{i=1}^L$ ($S_i \leq D$) と表す。以下では、これらの低次元行列を圧縮行列と呼ぶ。このとき、圧縮行列の成分と次元とを自動的に決めたい。

更に、出力される特徴行列と圧縮行列は全て半正定であることを要請する。

3. 提案手法

3.1 階層的な隠れ変数を持つ確率モデル

観測行列 \mathcal{K} を表すモデルとして、以下の確率分布を導入する:

$$\begin{aligned} p(\mathcal{K}, Z, X, Y, \mu, \tau | \pi, \alpha, \beta) \\ = p(\mathcal{K} | Z, X, Y, \mu, \tau) p(Z | \pi) p(Y | \beta) p(X | \alpha) p(\mu | \tau) p(\tau) \quad (1) \\ p(\mathcal{K} | Z, X, Y, \mu, \tau) \\ = \prod_{t=1}^T \prod_{i,j=1}^D \prod_{k=1}^K \prod_{r=1}^R \prod_{c=1}^C [\mathcal{N}((K_t)_{ij} | \mu_{rc}^k, \sigma^2 = (\tau_{rc}^k)^{-1})]^{z_{tk} x_{ir}^k y_{jc}^k} q(2) \end{aligned}$$

$$p(Z | \pi) = \prod_{t=1}^T \prod_{k=1}^K (\pi_k)^{z_{tk}} \quad (3)$$

$$p(Y | \beta) = \prod_{j=1}^D \prod_{c=1}^C \prod_{k=1}^K (\beta_c^k)^{y_{jc}^k} \quad (4)$$

$$p(X | \alpha) = \prod_{i=1}^D \prod_{r=1}^R \prod_{k=1}^K (\alpha_r^k)^{x_{ir}^k} \quad (5)$$

$$p(\tau) = \prod_{k=1}^K \prod_{r=1}^R \prod_{c=1}^C \mathcal{G}(\tau_{rc}^k | a_0, b_0) \quad (6)$$

$$p(\mu | \tau) = \prod_{k=1}^K \prod_{r=1}^R \prod_{c=1}^C \mathcal{N}(\mu_{rc}^k | \mu_0, (\lambda_0 \tau_{rc}^k)^{-1}) \quad (7)$$

ただし、 \mathcal{N} , \mathcal{G} はそれぞれ、一次元正規分布と一次元ガンマ分布を表す。第 t 番目の観測行列の ij 成分を $(K_t)_{ij}$ と表す。 $(a_0, b_0, \mu_0, \lambda_0)$ は事前分布のハイパーパラメータで、 $a_0, b_0, \lambda_0 > 0$ という条件を満たす。

このモデルは観測行列の行列要素の発生確率を表す確率分布であり、階層的な混合分布である。一つ目の階層は行列の混合を表す。このモデルでは、各観測行列は K 個の混合の何れかから発生する。第 t 番目の観測行列の第 k 番目の混合への帰属フラグを表す隠れ変数を z_{tk} と表す。隠れ変数 Z は $z_{tk} \in \{0, 1\}$, $\sum_{k=1}^K z_{tk} = 1$ を満たす。

二つ目の階層は行と列の分割（つまり行列のブロック）を表す。このモデルでは、一つの行列の混合に属する観測行列の各行は R 個の分割の何れかから発生する。第 k 番目の混合に属する観測行列の第 i 行の第 r 番目の分割への帰属フラグを表す隠れ変数を x_{ir}^k と表す。隠れ変数 X は $x_{ir}^k \in \{0, 1\}$, $\sum_{r=1}^R x_{ir}^k = 1$ を満たす。同様に、一つの行列の混合に属する観測行列の各列は C 個の分割の何れかから発生する。第 k 番目の混合に属する観測行列の第 j 列の第 c 番目の分割への帰属フラグを表す隠れ変数を y_{jc}^k と表す。隠れ変数 Y は $y_{jc}^k \in \{0, 1\}$, $\sum_{c=1}^C y_{jc}^k = 1$ を満たす。

第 t 番目の観測行列の ij 成分 $(K_t)_{ij}$ について考える。このモデルでは第 t 番目の観測行列は $z_{tk} = 1$ となる第 k 番目の（行列の）混合から発生し、第 k 番目の混合比は π_k ($\pi_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^K \pi_k = 1$) となる。第 t 番目の観測行列が第 k 番目の混合から発生するとき、観測行列の第 i 行は $x_{ir}^k = 1$ となる第 r 番目の行の分割から発生する。行に対する第 r 番目の分割の混合比は α_r^k ($\alpha_r^k \geq 0$, $\sum_{r=1}^R \alpha_r^k = 1$) となる。

同様に、第 t 番目の観測行列が第 k 番目の混合から発生するとき、観測行列の第 j 列は $y_{jc}^k = 1$ となる第 c 番目の分割から発生する。列に対する第 c 番目の分割の混合比は β_c^k ($\beta_c^k \geq 0$, $\sum_{c=1}^C \beta_c^k = 1$) となる。結果として、 $(K_t)_{ij}$ は分布 $\mathcal{N}((K_t)_{ij} | \mu_{rc}^k, (\tau_{rc}^k)^{-1})$ ($z_{tk} = x_{ir}^k = y_{jc}^k = 1$) に従う。

3.2 モデル推定

変分ベイズ推定を用いてモデルを推定する。変分ベイズ自由エネルギーと呼ばれる以下の目的関数

$$F_{\text{VB}}(\mathcal{K} | q, \pi, \alpha, \beta) = - \int dX dY dZ d\mu d\tau q(X) q(Y) q(Z) q(\mu) q(\tau) \times \log \frac{p(\mathcal{K}, Z, X, Y, \mu, \tau | \pi, \alpha, \beta)}{q(X) q(Y) q(Z) q(\mu) q(\tau)} \quad (8)$$

を最小化するように、事後分布 $q(X)$, $q(Y)$, $q(Z)$, $q(\mu)$, $q(\tau)$ 及び混合比 π , α , β を求める。事後分布は変分法を用いて求め、混合比は点推定で求める。

変分ベイズ推定による分布の推定の概要は表 1 のようになる。これは、EM アルゴリズムのように事後分布の推定とパラメータの推定を繰り返すアルゴリズムである。変分ベイズ推定

Algorithm 1 変分ベイズ推定による分布推定

- 1: 事前分布のパラメータ $a_0, b_0, \mu_0, \lambda_0$ を指定
- 2: 分布 $q(Z)$, $q(X)$, $q(Y)$, $q(\mu)$, $q(\tau)$ を初期化
- 3: 混合比 π , α , β を初期化 (分布 $\{q\}$ から求める)
- 4: **repeat**
- 5: 分布 $q(Z)$, $q(X)$, $q(Y)$, $q(\mu)$, $q(\tau)$ を更新
- 6: 混合比 π , α , β を更新
- 7: **until** 変分ベイズ自由エネルギーが収束条件を満たす

では分布 $\{q\}$ の形は解析的に決まり、今考えているモデルでは以下の形をとる:

$$q(Z) = \prod_{t=1}^T \prod_{k=1}^K (r_{tk})^{z_{tk}}, \quad r_{tk} = \frac{\rho_{tk}}{\sum_{k'=1}^K \rho_{tk'}} \quad (9)$$

$$q(X) = \prod_{i=1}^D \prod_{r=1}^R \prod_{k=1}^K (u_{ir}^k)^{x_{ir}^k}, \quad u_{ir}^k = \frac{\omega_{ir}^k}{\sum_{r'=1}^R \omega_{ir}^k} \quad (10)$$

$$q(\mu) = \prod_{k=1}^K \prod_{r=1}^R \prod_{c=1}^C \mathcal{N}(\mu_{rc}^k | \hat{\mu}_{rc}^k, (\hat{\tau}_{rc}^k)^{-1}) \quad (11)$$

$$q(\tau) = \prod_{k=1}^K \prod_{r=1}^R \prod_{c=1}^C \mathcal{G}(\tau_{rc}^k | \hat{a}_{rc}^k, \hat{b}_{rc}^k) \quad (12)$$

本稿の問題設定では入力行列は半正定であるから、常に $q(X) = q(Y)$ とできる。この為、紙面の都合から、以下では $R = C$ とし、 Y についての式は省略する。各分布 (のパラメータ) 及び各混合比の更新式は以下ようになる:

$$\begin{aligned} \rho_{tk} &= \pi_k \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^D \sum_{r=1}^R \sum_{c=1}^C u_{ir}^k u_{jc}^k \left\{ -\frac{1}{2} \log 2\pi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\psi(\hat{a}_{rc}^k) - \log \hat{b}_{rc}^k) - \frac{\hat{a}_{rc}^k}{2\hat{b}_{rc}^k} [(\hat{\mu}_{rc}^k - K_{ij}^t)^2 + (\hat{\tau}_{rc}^k)^{-1}] \right\} \right\} \quad (13) \\ \omega_{ir}^k &= \alpha_r^k \exp \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^D \sum_{c=1}^R r_{tk} u_{jc}^k \left\{ -\frac{1}{2} \log 2\pi \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} (\psi(\hat{a}_{rc}^k) - \log \hat{b}_{rc}^k) - \frac{\hat{a}_{rc}^k}{2\hat{b}_{rc}^k} \left[(\hat{\mu}_{rc}^k - K_{ij}^t)^2 + (\hat{\tau}_{rc}^k)^{-1} \right] \left. \right\} \quad (14)$$

$$\hat{\mu}_{rc}^k = \frac{\mu_0 + \sum_{t=1}^T \sum_{i,j=1}^D r_{tk} u_{ir}^k u_{jc}^k K_{ij}^t}{\lambda_0 + \sum_{t=1}^T \sum_{i,j=1}^D r_{tk} u_{ir}^k u_{jc}^k} \quad (15)$$

$$\hat{\tau}_{rc}^k = \frac{\hat{a}_{rc}^k}{\hat{b}_{rc}^k} \left[\lambda_0 + \sum_{t=1}^T \sum_{i,j=1}^D r_{tk} u_{ir}^k u_{jc}^k \right] \quad (16)$$

$$\hat{a}_{rc}^k = a_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D r_{tk} u_{ir}^k u_{jc}^k$$

$$\hat{b}_{rc}^k = b_0 + \frac{1}{2} \lambda_0 \left[(\hat{\mu}_{rc}^k - \mu_0)^2 + (\hat{\tau}_{rc}^k)^{-1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i,j=1}^D r_{tk} u_{ir}^k u_{jc}^k \left[(\hat{\mu}_{rc}^k - K_{ij}^t)^2 + (\hat{\tau}_{rc}^k)^{-1} \right] \quad (17)$$

$$\pi_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{tk}, \quad \alpha_r^k = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D u_{ir}^k \quad (18)$$

ただし、 ψ はディガンマ関数を表す。

以上の変分ベイズ推定を用いた分布推定により、スパースな混合比が得られる。これによって、混合数と分割数とが自動的に決定される。

3.3 特徴抽出

ここまでで求めた隠れ変数の事後分布 $q(X)$, $q(Z)$ と混合比 α , π を用いて特徴行列と圧縮行列を求める。

まず、特徴行列を求める。行列の混合数 L は、混合比を用いて $L = \sum_{k=1}^K \delta(\pi_k > 0)$ として求められる。ただし、 $\delta(\cdot)$ は括弧内の条件が成り立つ場合に 1、そうでなければ 0 となる関数であるとする。 π の第 l 番目の非零成分の添字を $k(l)$ と表す。このとき、第 l 番目の特徴行列を以下の式から求める：

$$\bar{K}_l = \frac{\sum_{t=1}^T \langle z_{tk(l)} \rangle_{q(Z)} K_t}{\sum_{t=1}^T \langle z_{tk(l)} \rangle_{q(Z)}} = \frac{\sum_{t=1}^T r_{tk(l)} K_t}{\sum_{t=1}^T r_{tk(l)}} \quad (19)$$

ただし、 $\langle \cdot \rangle_q$ は分布 q の下での変数 \cdot の期待値を表す。また、ここでは $\langle z_{tk} \rangle_{q(Z)} = r_{tk}$ を用いた。ここで、 $r_{tk(l)}$ は第 t 番目の観測行列の特徴行列 \bar{K}_l (第 $k(l)$ 番目の混合) への帰属フラグの期待値を表すから、(19) 式の特徴行列 \bar{K}_l は観測行列の重み付き期待値となる。また、その際の重みは第 $k(l)$ 番目の混合に対する観測行列の帰属確率の期待値である。

次に、圧縮行列を求める。第 l 番目の特徴行列に対応する圧縮行列の次元 (特徴行列の分割数) S_l は、混合比を用いて $S_l = \sum_{i=1}^D \delta(\sigma_r^{k(l)} > 0)$ として求められる。 $\sigma_r^{k(l)}$ の第 s 番目の非零成分の添字を $r(l, s)$ と表す。このとき、第 l 番目の特徴行列に対応する圧縮行列を以下の式から求める：

$$\bar{K}_l^c = \bar{C}_l^T \bar{K}_l \bar{C}_l \quad (20)$$

$$(\bar{C}_l)_{is} = \frac{\langle x_{ir(l,s)}^{k(l)} \rangle_{q(X)}}{\sum_{i'=1}^D \langle x_{i'r(l,s)}^{k(l)} \rangle_{q(X)}} = \frac{u_{ir(l,s)}^{k(l)}}{\sum_{i'=1}^D u_{i'r(l,s)}^{k(l)}} \quad (21)$$

$(s = 1, 2, \dots, S_l, i = 1, 2, \dots, D)$

ここでは、(19) 式の場合と同様に、 $\langle x_{ir}^{k(l)} \rangle_{q(X)} = u_{ir}^k$ を用いた。つまり、 $u_{ir(l,s)}^{k(l)}$ は第 $k(l)$ 番目の混合に属する観測行列の第 i 行の第 $r(l, s)$ 番目の分割への帰属フラグの期待値を表

す。圧縮の為の変換行列 \bar{C}_l は $D \times S_l$ 次元の非負行列であり、 $\sum_{i=1}^D (\bar{C}_l)_{is} = 1$ を満たす。この為、 $\sum_{i=1}^D (\bar{C}_l)_{is} = p(i|s)$ というように各行列要素を確率とみなせる。従って、(20) 式は、 $(\bar{K}_l^c)_{ss'} = \sum_{i,j=1}^D p(i|s)p(j|s') (\bar{K}_l)_{ij}$ とみなせる。これは、圧縮行列の各成分が、特徴行列の対応するブロック内の行列要素の期待値として表されることを示す。

3.4 提案手法の性質

提案手法の主な特徴は以下の二つである。第一に、混合数と分割数が自動的に決定される。これはモデルの推定に変分ベイズ推定を用いることによる。

第二に、提案手法では、特徴行列と圧縮行列は共に半正定となる。つまり、入力行列の半正定性が保存される。このことは、以下のようにして示される。(19) 式より、特徴行列は非負係数による入力行列の和になっている。なぜならば帰属フラグの期待値である r_{tk} が非負だからである。従って、半正定行列の非負係数による和は半正定であるから、(19) 式によって求められる特徴行列は半正定となる。また、半正定な行列 K は常に $K = A^T A$ の形 (A は行列を表す) で書け、その逆も成り立つ。特徴行列が半正定であることから、(20) 式で表される圧縮行列は $\bar{K}_l^c = \bar{C}_l^T \bar{K}_l \bar{C}_l = \bar{C}_l^T A^T A \bar{C}_l = (\bar{C}_l A)^T (A \bar{C}_l)$ と表される。従って、圧縮行列も半正定となる。

4. 実験

4.1 実験設定

以下の実験では、提案手法の有効性を定性的に示す。

20 本の経済時系列を入力として、相関係数行列を作成した。経済時系列として 9 つの為替と 11 の株価指標を用いた。為替は対米ドルのレート値とし、USDAUD, USDBRL, USDCAD, USDEUR, USDGBP, USDHKD, USDJPY, USDKRW, USDRUB を用いた。株価指標としては AORD, BVSP, CAC40, DAX, DJI, FTSE100, Hang Seng, KOSPI composite, N225, RTSI, TSX composite を用いた。

これらの時系列から幅 50 日のウィンドウを切り出して相関係数行列を構成し、提案手法の入力とした。各相関係数行列には、ウィンドウの最終日の日付を時間ラベルとして付与した。2008/7/15 から 2008/12/30 までの期間の時間ラベルを持つ 100 日分 (100 個) の相関係数行列を入力とした。入力とした相関係数行列の一部を図 1 に示した。

事前分布のパラメータは、 $(a_0, b_0, \mu_0, \lambda_0) = (10^{-4}, 10^{-4}, 0, 10^{-4})$ とした。混合数の最大値は $K = 10$ とし、分割数の最大値は $R = C = 5$ とした。

この実験は、経済時系列の相関構造のクラスタリングと時系列のクラスタリング (相関係数行列の分割・ブロック化) を同時に実行することに相当する。

4.2 実験結果

結果として得られた特徴行列を図 2 に、圧縮行列を図 3 にまとめた。これらの結果から、提案手法によって特徴行列の抽出と圧縮 (分割) を同時実行できることが定性的に示される。

まず、特徴行列の抽出について、図 1 と図 2 を比較すると、図 1 の主要なパターンが特徴行列として抽出されていることが分かる。また、混合数は $6 (< K = 10)$ となり、自由度が自動的に決定されていることが分かる。

次に、圧縮行列の構築について、図 2 と図 3 を比較すると、図 2 の持つブロック構造が圧縮行列に反映されていることが分かる。また、各圧縮行列の次元は $3, 4 (< R = 5)$ となり、自由度が自動的に決定されていることが分かる。

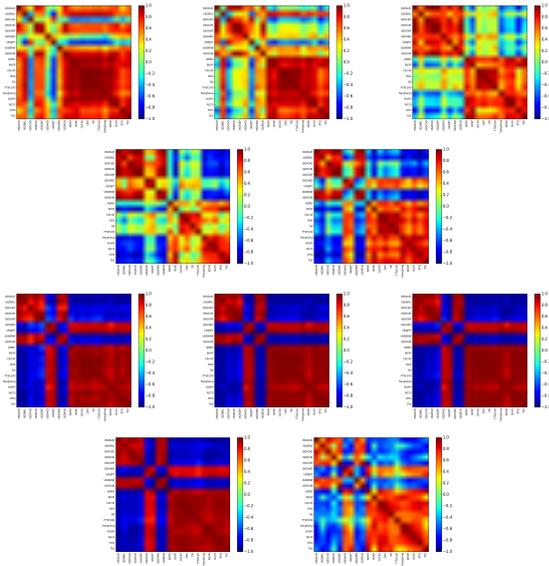


図 1: 入力とした相関係数行列の一部．対象期間内の $10n$ ($n = 1, 2, \dots, 10$) 日目の相関係数行列のヒートマップ．赤色が相関係数 = 1 である行列要素を，青色が相関係数 = -1 である行列要素をそれぞれ表す．

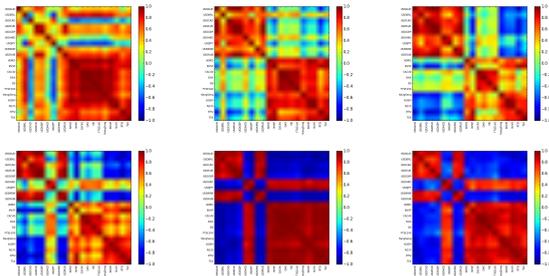


図 2: 提案手法によって出力された特徴行列 (代表的な相関係数行列) のヒートマップ．赤色が相関係数 = 1 である行列要素を，青色が相関係数 = -1 である行列要素をそれぞれ表す．

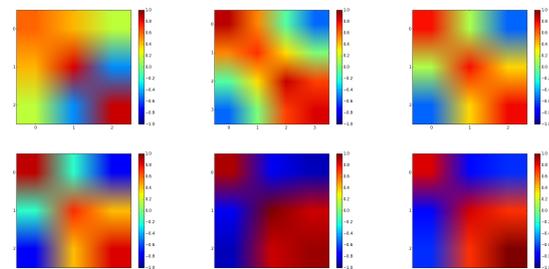


図 3: 提案手法によって出力された圧縮行列 (特徴行列の低次元表現) のヒートマップ．各行列を図 2 の特徴行列と対応する順序で並べてある．色の意味は図 2 と同じ．

入力行列と特徴行列との時間的な対応を図 4 にまとめた．時間的に近い相関係数同士が同じ混合に帰属するという妥当な結果が得られた．入力データの対象期間には，リーマンショックの開始日 (リーマンブラザーズの破綻の公表日) である 2008/9/16 が含まれる．図 4 をみると，丁度その日に帰属する混合の変化が見られた．これは，リーマンショックの発生による相関構造の変化が，特徴行列 3 (図 2 の上段右端) から特徴行列 4 (図 2 の下段左端) への変化として表されることを示している．

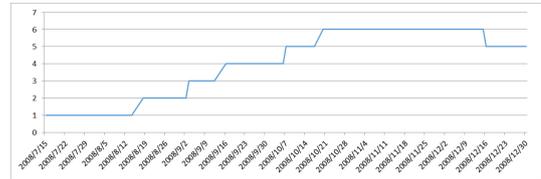


図 4: 入力行列と特徴行列との時間的な対応．横軸は入力行列の時間ラベルを表し，縦軸は入力行列の帰属確率最大となる混合 (特徴行列) の番号を表す．

5. まとめ

本稿では，複数の行列を入力として，それらの特徴を表す行列 (特徴行列) とその低次元表現 (圧縮行列) とを抽出する手法を提案した．提案手法は以下の二つの特徴を持つ．第一に，提案手法では，特徴行列の数と圧縮行列の次元が自動的に決定される．第二に，入力行列が半正定である場合，提案手法の出力である特徴行列と圧縮行列は常に半正定となる．

今後の課題として以下の二つが挙げられる．第一は，実データを用いた更なる検証である．第二は，一定次元ではない入力行列を扱えるように提案手法を拡張することである．

参考文献

[Attias 99] Attias, H. “Inferring parameters and structure of latent variable models by variational Bayes.” In *Proceedings of the Fifteenth conference on Uncertainty in artificial intelligence*, pp. 21-30 (1999).

[Chakrabarti 04] Chakrabarti, D., Papadimitriou, S., Modha, D. S., and Faloutsos, C. “Fully automatic cross-associations.” In *Proceedings of the tenth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, pp. 79-88 (2004).

[Corduneanu 01] Corduneanu, A. and Bishop, C. M. “Variational Bayesian model selection for mixture distributions.” *Artificial intelligence and Statistics, Vol. 2001*, pp. 27-34, Waltham, MA: Morgan Kaufmann (2001).

[Kemp 06] Kemp, C., Tenenbaum, J. B., Griffiths, T. L., Yamada, T., and Ueda, N. “Learning systems of concepts with an infinite relational model.” In *AAAI, Vol. 3*, p. 5 (2006).

[Maehara 11] Maehara, T. and Murota K. “Algorithm for error-controlled simultaneous block-diagonalization of matrices.” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 32.2, pp. 605-620 (2011).