1M2-1

地域上下限制約付きマッチングメカニズムの理論設計と評価

Strategy-proof matching with regional maximun and minimum quotas

倉田 涼史 [*1] Ryoji Kurata　後藤 誠大 [*1] Masahiro Goto　橋本 直幸 [*1] Naoyuki Hashimoto　岩崎 敦 [*2] Atsushi Iwasaki　川崎 雄二郎 [*1] Yujiro Kawasaki　上田 俊 [*1] Suguru Ueda
横尾 真 [*1] Makoto Yokoo

[*1] 九州大学　システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

[*2] 電気通信大学　情報システム学研究科
Graduate School of Information Systems, The University of Electro-Communications

This paper considers matching problems with individual/regional minimum/maximum quotas. Although such quotas are relevant in many real-world settings, there is a lack of strategy-proof mechanisms that take all such quotas into account. We develop Priority List based the Deferred Acceptance mechanism (DA) with Regional minimum/maximum Quotas (PLDA-RQ) . When regional quotas are imposed, fairness and nonwastefulness are incompatible. Furthermore, students applying to different schools in the same region will compete with each other. We introduce two new properties that consider such competition; regional fairness and regional nonwastefulness. The former is stronger than standard fairness while the latter is weaker than standard nonwastefulness. We show that PLDA-RQ always gives the student-optimal regionally fair and regionally nonwasteful matching. Moreover, we compare our mechanism with an artificial cap mechanism via simulation experiments, which illustrate that our mechanism has an advantage in terms of three deseired properties.

1. 序論

マッチング理論は，各エージェント (学生と学校，研修医と病院，労働者と企業など) が個別の上限を持つ市場を対象として研究が盛んに行われてきた [*1]．このような市場については，各学校に割り当てられる学生の数について超えることが出来ない限度が設定されている．

しかしながら，現実のマッチング問題においては，割当に関してより一般的な制約が設けられていることが多い．例えば，ハンガリーの大学入試のように，運営上の理由で各学校に最低限必要な学生数 (下限) が存在する場合がある [Biró 10]．さらには，下限や上限は個別の学校のみならず，学校の集合に対しても課される場合などがある．このようなモデルの例として，研修医と病院間のマッチング問題が挙げられ，地域上下限は離島や僻地の医療機関に一定数の配属を保証しつつ，首都圏への配属が集中することを防ぐ重要な役割を持つ．本論文では，学校選択問題を題材とした学生と学校間のマッチングについて考える．

表 1 は，地域制約に関する既存の研究についてまとめたものである．個別の上限のみ存在する場合には，公平性かつ非浪費性を満たす，戦略的操作不可能な受け入れ保留メカニズム (Deferred Acceptance mechanism, DA) [Gale 62] が広く用いられている．個別下限制約に加えて，地域上限制約と地域下限制約のそれぞれに適応可能なメカニズムは存在するが，これらを同時に満たすメカニズムは存在しない．また，Goto ら [Goto 14a] は地域構造に制限がない場合，実現可能なマッ

表 1: 地域制約の下でのメカニズムの分類 (下線部:本論文で得られた結果)，(KK [Kamada 13], FITUY [Fragiadakis 12], GIKYY [Goto 14b], GHIKUYY [Goto 14a])

		Maximum quotas		
		Individual	Hierarchical regions	General regions
Minimum quotas	None	DA	KK GIKYY	NP-complete
	Individual	FITUY	**<u>PLDA-RQ</u>**	
	Hierarchical regions	GHIKUYY		
	General regions	NP-complete		

チングの存在性を判定する問題は NP 完全であることを示している．そこで，本論文では，地域構造が階層的である場合に制限し，地域上下限制約を満たすメカニズムの提案を行う．

個別下限または地域制約が課された場合には，公平性かつ非浪費性を満たすマッチングが存在しないことが知られている [Fragiadakis 12]．地域制約が存在する場合，同じ地域に属している別々の学校を希望している学生同士にも競争が起こりうる．そこで，そのような競争を考慮し，地域の観点から公平性と非浪費性を新たに定義する．前者は通常の公平性よりも強い性質であり，後者は通常の非浪費性よりも弱い性質である．

本論文では，プライオリティーリストに基づく地域上下限制約付き受け入れ保留メカニズム (Priority List based Deferred Acceptance mechanism with Regional maximum and minimum Quotas, PLDA-RQ) を提案する．PLDA-RQ は，地域の観点での公平性，および地域の観点での非浪費性を満たすマッチングの中で，学生最適なマッチングを常に生成する．

連絡先: 倉田涼史，九州大学大学院システム情報科学府，812-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576，kurata@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

*1 文献 [Roth 90] にこの分野における文献の多くの結果が幅広く収められている．

2. モデル

地域制約が存在する場合の学生と学校の間のマッチング問題は $(S, C, R, p, q, \succ_S, \succ_C)$ の組で定義される．$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ は学生の集合，$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ は学校の集合であり，n，m はそれぞれ学生，学校の数とする．また，$R = \{r_1, r_2, \ldots\}$ は地域の集合であり，各地域 r は，学校の部分集合 $r \in 2^C \setminus \{\emptyset\}$ として与えられる．$p = (p_r)_{r \in R}$ と $q = (q_r)_{r \in R}$ は地域下限と上限のベクトルであり，すべての $r \in R$ に関して $0 \leq p_r \leq q_r$ が成立する．各学生 s は学校に対して厳密な選好順序 $\succ_s$ を持つ．また，同様に各学校 c は，学生に関して個別の優先順序 $\succ_c$ を持つ．$rank_c(s)$ は，学校 c の優先順序 $\succ_c$ における学生 s の順位を表す．すべての学校及び学生にとって，割当相手が存在することは，割り当てられないことよりも厳密に好ましいと仮定する *2．地域構造に制限が存在しない場合，実現可能性の判定は NP 完全となり難解である [Goto 14a]．ゆえに，本論文では地域が階層的な構造を持つ場合のみを対象とする．具体的に，地域の集合 R が**階層的**であるとは，$r \neq r'$ である $\forall r, r' \in R$ に関して，以下のいずれかが成立する時である: (i) $r \cap r' = \emptyset$，(ii) $r \subset r'$，もしくは (iii) $r' \subset r$．地域の集合 R が階層的である場合，R は木構造で表現可能である．一般性を失うことなしに，すべての学校の全体集合である C が R に含まれると仮定する．C の上下限制約は学生数 n に対して $p_C = q_C = n$ とする．地域の集合 R を表現する**木** T_R は以下で定義される: (i) ルートノード C はすべての学校の全体集合である，(ii) 葉ノード $\{c\}$ は，個別の学校 $c \in C$ のみで構成される地域である，(iii) $r \neq C$ である各ノード $r \in R$ に関して，その親ノード r' は r の真上位集合の中で最小のものである．r に関して，その子ノードの集合を $children(r)$ と表記する．葉ノード $r = \{c\}$ では，$children(r)$ は $\emptyset$ となる．明らかに，$|r| > 1$ であるノード r では $r = \bigcup_{r' \in children(r)} r'$ が成立する．以降では "ノード" と "地域" を互換的に用いる．

学生と学校は契約によって割り当てられると仮定する．文献 [Hatfield 05] のモデルに準じ，(s, c) は s が c に割り当てられることを表す．全ての契約の集合として $X = S \times C$ を定義する．この時，マッチングは各学生が高々1 つの契約と関連している契約の集合 $X' \subseteq X$ として表現する．さらに，任意のエージェント $a \in S \cup C$ に対して，X'_a は X' 内で a が関係する契約の集合とし，X' は $\bigcup_{c \in r} X'_c$ を表す．

マッチング X' に対し，$\forall r, p_r \leq |X'_r| \leq q_r$ かつ $\forall s, |X'_s| = 1$ が成り立つ時 X' は**実現可能**であるという．また，マッチング X' に対し，$X' \subseteq X''$ となる実現可能なマッチング $X'' \subseteq X$ が存在するならば，X' は (地域上下限制約のもとで) **許容可能**であるという．一般性を失わずに，任意の r に対して $\sum_{r' \in children(r)} p_{r'} \leq p_r \leq q_r \leq \sum_{r' \in children(r)} q_{r'}$ であると仮定する．この条件を満たすならば，実現可能なマッチングは常に存在する．

すべての学校はある組織あるいは組合に属し，それを通して，各学生と各学校間の契約に対する優先順序について，全学校の合意が形成されていると仮定する．その合意事項に基づいて，X' 上の厳密な優先順序である**プライオリティーリスト (priority list, PL)** $\succ^{PL}$ が設定されている．PL は学校の優先順序を反映し，ある学生 $s, s' \in S$ とある学校 $c \in C$ に対して $\succ^{PL}$ は $s \succ_c s'$ の時，かつその時に限り $(s, c) \succ^{PL} (s', c)$ が成り立つとする．PL を生成する自然かつ簡単な方法の一例として，$\succ_C$ と学校間でのタイブレークの順序を用いる方法がある．例えば，タイブレークの順序を $c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \cdots \rightarrow c_m$ とする．この順序を元に $\succ^{PL}$ を以下のように定める．ある $s, s' \in S$ と $c_i, c_j \in C$ に対し，$(s, c_i) \succ^{PL} (s', c_j)$ が成り立つのは以下のどちらかの条件が成り立つ時である: (i) $rank_{c_i}(s) < rank_{c_j}(s')$，もしくは (ii) $rank_{c_i}(s) = rank_{c_j}(s')$ かつ $i < j$．この時, 明らかに $\succ^{PL}$ は全ての学校の優先順序を反映している．

$\mathcal{M}$ を任意のマッチングの集合とする．X' が $\mathcal{M}$ の中で**学生最適**であるとは，$X' \in \mathcal{M}$ であり，すべての学生 s にとって $\mathcal{M}$ 内のいかなるマッチング X'' での割当よりも X' での割当の方が弱い意味で好ましいことをいう．

以下，マッチングやメカニズムが満たすべき望ましい性質を示す．実現可能なマッチング X' に対し，学生 s が別の学生 s' に対して妥当な不満を持つとは，$(s, c), (s', c') \in X'$ について，$c' \succ_s c$ かつ $s \succ_{c'} s'$ が成立することである．実現可能なマッチング X' が**公平性**を満たすとは，マッチング X' のもとで，妥当な不満を持つ学生が存在しないことをいう．

実現可能なマッチング X' に対し，学生 s が学校 c' の空きシートを要求するとは，$(s, c) \in X'$ に関して以下の (i)，(ii) が成立することである: (i) $c' \succ_s c$，(ii) マッチング X' について，s を c から c' に移動したマッチング X'' が実現可能である，すなわち，$X'' = X' \setminus \{(s, c')\} \cup \{(s, c)\}$ が実現可能である．実現可能なマッチング X'' が**非浪費性**を満たすとは，マッチング X' で，空きシートを要求する学生が存在しないことをいう．

一般的に，上下限制約が存在する場合，公平性かつ非浪費性を満たすマッチングは存在しない．ゆえに，公平性と非浪費性について地域を考慮した新しい性質を示す．

定義 1 (地域の観点での公平性) 実現可能なマッチング X' に対し，学生 s が $s' \neq s$ に地域の観点で妥当な不満を持つとは，$\hat{c} \in C$ と $(s, c), (s', c') \in X'$ に関して以下の条件が成立することである: (i) $\hat{c} \succ_s c$，(ii) $(s, \hat{c}) \succ^{PL} (s', c')$，(iii) マッチング X' について，s を c から $\hat{c}$ へ，s' を c' から c へ移動したマッチング $X' \setminus \{(s, c), (s', c')\} \cup \{(s, \hat{c}), (s', c)\}$ が実現可能である．実現可能なマッチング X' が**地域の観点での公平性**を満たすとは，マッチング X' で，地域の観点で妥当な不満を持つ学生が存在しないことをいう．

定義 2 (地域の観点での非浪費性) 実現可能なマッチング X' に対して，学生 s が地域の観点で学校 c に空きシートを要求するとは，$(s, c') \in X'$ に関して，以下の条件が成立することである: (i) $c \succ_s c'$，(ii) $(s, c) \succ^{PL} (s, c')$，(iii) マッチング X' について，s を c から c' に移動したマッチング X''，すなわち，$X' \setminus \{(s, c)\} \cup \{(s, c')\}$ が実現可能である．実現可能なマッチング X' が**地域の観点での非浪費性**を満たすとは，マッチング X' で，地域の観点で空きシートを要求する学生が存在しないことをいう．

適切な選好順序と優先順序が与えられている場合に，メカニズムの生成するマッチングが常に実現可能であるならば，メカニズムは実現可能であるという．これは (地域の観点での) 公平性や (地域の観点での) 非浪費性に関しても同様に表現される．また，メカニズムが**戦略的操作不可能**であるとは，どの学生も，他の学生の申告にかかわらず，自身の選好順序を偽って申告する誘因を持たないことをいう．

*2 この仮定がない場合，たとえ十分多くの学生が存在しても，すべての学校の下限制約を満たすことは一般には不可能である．

3. 地域上下限制約付きマッチングメカニズム

3.1 期待最小カウント

マッチングが許容可能/実現可能であるか否かを容易に判断するために，**期待最小カウント (expected minimum count)** という概念を導入する．期待最小カウントとは，契約の集合 X' に対し，全ての下限制約が満たされるように契約を加えた時，各地域 r に含まれる契約の数の最小値であり $e_r(X')$ と表す．具体的には，任意の r に対して，e_r は以下のように定義される: 任意の $X' \subseteq X$ に関して，

$$e_r(X') := \begin{cases} \max\{|X'_r|, p_r\} & \text{if } |r| = 1, \\ \max\{\sum_{r' \in children(r)} e_{r'}(X'), p_r\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定義より，任意の地域 r に対して，$e_r(X') \geq |X'_r|$ と $e_r(X') \geq p_r$ が成り立つ．また，任意の $X', X'' \subseteq X$ に関して, $X' \subseteq X''$ ならば，$e_r(X') \leq e_r(X'')$ が成り立つ．契約の集合 $X' \subseteq X$ に対し全ての地域 r で $e_r(X') \leq q_r$ ならば，X' は**学校に関して受入可能**であるという．また，X' が学校に関して受入可能であり，任意の $s \in S$ に関して $|X'_s| \leq 1$ が成り立つ時，およびその時に限り，X' は許容可能である．さらに，X' が許容可能かつ $|X'_s| = 1, \forall s \in S$ ならば，X' は実現可能である．

3.2 PL に基づく地域上下限制約付き受け入れ保留メカニズム

本節では，PL に基づく地域上下限制約付き受け入れ保留メカニズム (PLDA-RQ) と呼ばれる戦略的操作不可能なメカニズムを示す．これは地域の観点での公平性かつ地域の観点での非浪費性を満たし，学生最適なマッチングを生成する．

準備として，任意の学生 s と学校の集合 C に関して，選択関数 Ch_s と Ch_C を定義する．それぞれ，2^X から 2^X への関数である．まず，任意の学生 s に関する選択関数 Ch_s は X'_s の中で s にとって最も好ましい契約を唯一の要素として持つ集合を返す関数とする [*3]．$Ch_S(X') := \bigcup_{s \in S} Ch_s(X')$ とする．

次に，C の選択関数 Ch_C を以下のように定義する．

定義 3 (学校の選択関数 $Ch_C(X')$)

1. $Y' = \emptyset$ とし，全ての $r \in R$ について，$e_r(Y')$ を計算する．
2. PL に従い X' に含まれる契約をソートする．
3. $i = 1$ から $|X'|$ の順に X' に含まれる i 番目の要素 (s, c) に関して，以下の処理を行う．
   - 全ての r に関して，$e_r(Y')$ を元に $e_r(Y' \cup \{(s, c)\})$ を計算する．
   - 全ての r に関して，$e_r(Y' \cup \{(s, c)\}) \leq q_r$ が成り立つならば，(s, c) を Y' に加える．
4. Y' を出力する．

PLDA-RQ は文献 [Hatfield 05] において導入されている the Generalized Gale-Shapley メカニズム (GGS) の一種であり，上述の選択関数 Ch_S および Ch_C を用いて以下のように記述出来る．ここで，$Re_C(X') = X' \setminus Ch_C(X')$ とし，X_S は各学生が選択可能な契約の集合を表す．すなわち，X_S には学校に拒否されていない契約のみが含まれている．

*3 $X'_s = \emptyset$ の場合は $Ch_s(X') = \emptyset$ とする．

定義 4 (PLDA-RQ) $X_S = X$ とし，以下の処理を実行する．

Step 1 $X' := Ch_S(X_S)$ とする, すなわち，X_S の中から各学生の選好順序で最も好ましい契約が選ばれる．

Step 2 $X'' := Ch_C(X')$ とする, すなわち，X' の中から C が最も優先する受入可能な契約の集合が選ばれる．

Step 3 $X' = X''$ ならば，X' を出力する．そうでなければ，$X_S := X_S \setminus Re_C(X')$ とし，Step 1 に戻る．

X_S は単調に減少し，PLDA-RQ は有限回の繰り返しで終了する．ゆえに，PLDA-RQ は n と m に関する多項式時間で終了する．

定理 1 PLDA-RQ は戦略的操作不可能であり，地域の観点での公平性かつ地域の観点での非浪費性を満たすメカニズムであり，この性質を満たすマッチングの中で学生最適なマッチングを出力する．

紙面の都合上詳細な証明は割愛する．PLDA-RQ は PL の順番に従って X' を出力することより，地域の観点での公平性，かつ地域の観点での非浪費性を満たす．また，PLDA-RQ は GGS の一種であることから戦略的操作不可能性を満たす [Hatfield 05]．さらに，地域の観点での公平性と地域の観点での非浪費性を満たすマッチングの中で学生最適なマッチングを出力することも，GGS の性質より保証される．

次に PLDA-RQ の動作例を記す．

例 1 8 人の学生 $S = \{s_1, \ldots, s_8\}$ と 4 つの学校 $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ が存在する．地域の集合 R は $\{C, \{c_1, c_2\}, \{c_3, c_4\}, \{c_1\}, \{c_2\}, \{c_3\}, \{c_4\}\}$ で与える．どの学校 c も，上限制約 q_c と下限制約 p_c を $q_c = 3$ と $p_c = 1$ とする．また，地域 $\{c_1, c_2\}$ と $\{c_3, c_4\}$ の上限制約，下限制約をそれぞれ 5 と 3 とする．ルートノード C の上限制約，下限制約は $q_C = p_C = 8$ と設定する．

学生の選好順序と学校の優先順序を以下のように与える:

$$\begin{array}{lcccc} \succ_{s_1}, \succ_{s_2}, \succ_{s_3}, \succ_{s_4}: & c_1 & c_2 & c_3 & c_4, \\ \succ_{s_5}, \succ_{s_6}, \succ_{s_7}, \succ_{s_8}: & c_2 & c_3 & c_4 & c_1. \end{array}$$

全ての学校 $c \in C$ に関して，

$$\succ_c: \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6 \quad s_7 \quad s_8.$$

タイブレークの順序は $c_1 \to c_2 \to c_3 \to c_4$ とし，$\succ^{PL}$ は 2 章で示した $\succ_C$ とタイブレークの順序を用いる方法によって生成されるものとする．

1 回目は, 各学生は最も選好の高い契約を選択する．つまり，s_1, s_2, s_3, s_4 は c_1 を，s_5, s_6, s_7, s_8 は c_2 を希望する．これらの契約は PL に従って並べられ，その順番で拒否されるか否かを判定する．この結果 s_4, s_7, s_8 が拒否される．

2 回目は, 各学生は C によって今まで拒否されていない中で最も選好の高い契約を選択する．よって，先ほど拒否された s_4, s_7, s_8 以外はそのままの学校を希望し，s_4 は c_2 を，s_7, s_8 は c_3 を希望する．同様に，判定を行う．この結果，次は s_6 が拒否される．

以降，同様の処理を繰り返すと，X' は以下のようになる:

$$\begin{aligned} X' := \; & \{(s_1, c_1), (s_2, c_1), (s_3, c_1), (s_4, c_2), \\ & (s_5, c_2), (s_6, c_3), (s_7, c_3), (s_8, c_4)\}. \end{aligned}$$

この時，X' は $X'' = Y' = X'$ であるので，学校に関して受入可能である．最後に，メカニズムは X' を出力し，終了する．

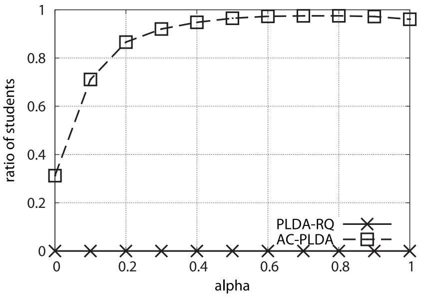

図 1: 不満を持つ学生の割合

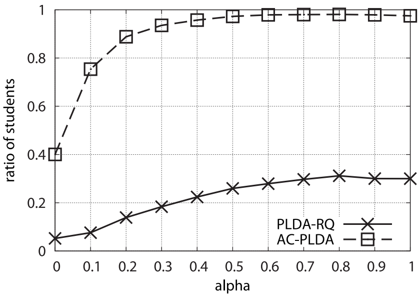

図 2: 空きシートを要求する学生の割合

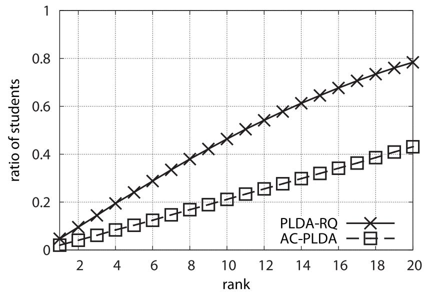

図 3: 効率性における累積頻度分布関数

4. 評価

本章では新たに提案したメカニズムの評価を行う．ここでは，学生数 n を 512，学校数 m を 64 と設定する．階層的な地域構造は，m 個の葉ノードを伴った二分木で与えられる．C を除いた各地域 r の上限制約 $q_r = 512/2^{d_r} + k$ と定める．ここで，d_r は C から見た r の深さ，k はパラメータである．また，各学校に関する個別の下限制約 $p_c = 0$ とし，C を除いた各地域 r に関する地域下限制約はパラメータ l を用い，$\sum_{r' \in children(r)} p_{r'} + l$ とする．この実験では，k を 8，l を 4 に設定する．

学生の選好順序については，各学生ごとに，各学校に対する評価値を生成し，その評価値に基づいて順序を定める．学生の各学校の評価値は以下のように決定する．まず，全ての学生で共通のベクトル u_c を $[0,1]^m$ から一様分布により生成する．次に，個別のベクトル u_s を，同様に $[0,1]^m$ から一様分布により生成する．さらに，これらを用いて各学校に対する s の評価値を，パラメータ $\alpha \in [0,1]$ を用いて $\alpha u_c + (1-\alpha) u_s$ で与える．α の値が大きいほど，学生の選好の相関が強くなる．各学校の優先順序 $\succ_c$ は一様分布により生成し，$\succ_{PL}$ はタイブレークの順序 $c_1 \to c_2 \to \cdots \to c_m$ と $\succ_C$ によって 2 章で示した方法によって生成される．各パラメータ設定に関して 100 個の問題例を生成し，各値に対して 100 問の平均をとる．各実験において，比較対象として人為的なキャップを加えた PL に基づく受け入れ保留メカニズム (Artificial Cap-PLDA，AC-PLDA) を用いる．AC-PLDA では，各学校の個別上限制約を満たせば自動的にすべての地域上限制約を満たすように，人為的に個別の上限制約が修正されている．

図 1 に地域の観点で不満を持つ学生の人数を示す．PLDA-RQ は地域の観点での公平性を満たすため，地域の観点で不満を持つ学生は存在しない．AC-PLDA では α の上昇に伴い，地域の観点で不満を持つ学生が増えている．

図 2 に空きシートを要求する学生の割合を示す．図が示すように，AC-PLDA は多くの学生が空きシートを要求するため，無駄が多い．両方のメカニズムにおいて α の上昇に伴い，空きシートを要求する学生は増加しているが，PLDA-RQ は AC-PLDA に比べて空きシートを要求する学生が非常に少ない．

図 3 に 2 つのメカニズムについて，k 番目，もしくはそれ以上に高い順位を持つ学校に割り当てられた学生数の平均の累積密度分布を用いて，両メカニズムの効率性を示す．グラフの値が急増している方が効率性が高い．つまり，PLDA-RQ は明らかに AC-PLDA より効率的である．AC-PLDA は人為的に上限制約の値を変更するメカニズムであるため，割当における柔軟性が失われており，効率性が著しく失われる．

実験の結果，公平性，非浪費性，効率性に関して PLDA-RQ は AC-PLDA よりも明らかに優れているといえる．

5. 結論

本論文では，階層的な地域構造を持つマッチング問題を分析し，地域上下限制約に対応した戦略的操作不可能なマッチングメカニズムとして，新たに PLDA-RQ を提案した．また，様々なシミュレーションを行い，PLDA-RQ の AC-PLDA に対する優位性を示した．今後の研究課題として，より一般的な制約が与えられた問題に対して実現可能なマッチングを得るためのメカニズムの開発や，PLDA-RQ の理論的性質をより深く解明することが挙げられる．

参考文献

[Biró 10] Biró, P., Fleiner, T., Irving, R., and Manlove, D.: The College Admissions problem with lower and common quotas, *Theoretical Computer Science*, Vol. 411, No. 34-36, pp. 3136–3153 (2010)

[Fragiadakis 12] Fragiadakis, D., Iwasaki, A., Troyan, P., Ueda, S., and Yokoo, M.: Strategyproof Matching with Minimum Quotas (2012), mimeo

[Gale 62] Gale, D. and Shapley, L. S.: College Admissions and the Stability of Marriage, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 1, pp. 9–15 (1962)

[Goto 14a] Goto, M., Hashimoto, N., Iwasaki, A., Kawasaki, Y., Ueda, S., Yasuda, Y., and Yokoo, M.: Strategy-proof matching with regional minimum quotas, in *AAMAS* (2014), forthcoming

[Goto 14b] Goto, M., Iwasaki, A., Kawasaki, Y., Yasuda, Y., and Yokoo, M.: Improving Fairness and Efficiency in Matching Markets with Regional Caps: Priority-list based Deferred Acceptance Mechanism (2014), mimeo

[Hatfield 05] Hatfield, J. W. and Milgrom, P. R.: Matching with Contracts, *American Economic Review*, Vol. 95, No. 4, pp. 913–935 (2005)

[Kamada 13] Kamada, Y. and Kojima, F.: Efficient Matching under Distributional Constraints: Theory and Applications (2013), mimeo

[Roth 90] Roth, A. E. and Sotomayor, M. A. O.: *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis (Econometric Society Monographs)*, Cambridge University Press (1990)