

経済市場におけるカオス現象とそのリスクの馴化

Chaotic behavior and its risk harnessing in an economic market

國上真章*¹

Masaaki KUNIGAMI

寺野隆雄*²

Takao TERANO

*¹ 筑波大学大学院ビジネス科学研究科 *² 東京工業大学大学院総合理工学研究科
Graduate School of Business Science Computational Intelligence and Systems Science
Tsukuba University Tokyo Institute of Technology

Economic markets offer many appropriate models for study with Agent Based Modeling. This paper researches on a new market model that has Cournot-type inverse demand function and social learning dynamics (SLD) of numberless bounded rational agents. This market model shows risk of chaotic behavior in a certain condition. This chaotic unpredictable behavior of market can be harnessed by a chaos control technique based on a characteristic signal that can be detected in the market behavior.

1. はじめに

経済市場のダイナミクスがカオス状態を導くかどうかは議論のわかれるところである。本報告では、市場の複雑性をエージェントベースモデリングによって分析する事例として、エージェントと市場間のマイクロマクロ相互作用を含む新しい市場モデルを提案し、経済学的に妥当な仮説のもとで、市場が効率的均衡ではなくカオスの挙動に陥るリスクを持つこと、またこのカオスの挙動が市場の挙動自体から得られる特徴的観測量に基づいて馴化する方法について議論する。

エージェント間の相互作用を基にした社会的状態変化の動的理論としては、進化的ゲーム([Hofbauer 1998])における複製子動学(RD: Replicator Dynamics), 出口([出口 2000], [Deguchi 2005])による社会学習動学(SLD: Social Learning Dynamics)等がある。これらは社会のマクロ状況に反応するエージェント個々の状態変更の集積が社会のマクロ状況を変容させ、ミクロな態度変更におけるランドスケープにフィードバックされる「マイクロマクロ」相互作用を簡単な動学により記述する。このうち RD は、エージェント相互のランダムマッチによる単位ゲームの繰返しとその利得=適応度に応じた増殖という進化生態学的アナロジーによる社会変化を表現する。一方 SLD は、マクロな社会情報(報酬構造)を反映したエージェントのマルコフの態度変化の集積としての社会の態度変化を社会的学習として表現する。これらは前提とする描像は違うものの、結果として同じ動学を与えることが示されている。([出口 2000], [Deguchi 2005])

本研究では、生物進化的アナロジーに拠らない経済モデルという立場から SLD によりモデルを構築するが、経済のモデルとしては各エージェントの利得係数行列が何らかの市場モデルから導出されるべきである。そこで複占・寡占市場におけるゲーム理論あるいは非線形動学においてよく利用される Cournot モデルの逆需要関数を拡張し、市場の価格・費用構造を記述する。

Cournot モデルは複占・寡占市場における非協力完全情報同時手番ゲームとして、ミクロ経済学/ゲーム理論の標準的な問題であり、供給量によって価格が決まる逆需要関数を与え生産者プレイヤー相互の戦略的行動について記述する([Gibbons 1992])。非線形経済動学の研究においては、この Cournot モデ

ルに、価格及び費用の非線形な構造、情報の不完全性や遅れ、学習等を加味することにより、複占・寡占エージェントの動学モデルを構築し、市場が複雑に振舞うことが示されている。([Puu 1991], [Puu 2003], [Kopel 1991])。

本研究では、Cournot モデルから逆需要関数の考えかたを取り出し複数のバリエーションが互い競合性を持つ財に拡張することで市場の利益構造を記述する。これを無数の生産主体が市場の収益性に関するマクロ情報を基に参入・退出を繰り返す社会学習動学モデルに接合することによりマイクロマクロ相互作用を含む市場動学を表現できることを示す。(Section 2)

この市場について、効率的な均衡を外れ予測不能な変動を続けるカオス状態に分岐してしまうリスクが発生することを示す。(Section 3) また、市場のカオスの変動に対して、カオス制御のメカニズムを適応し、市場の挙動から得られる情報に基づいて市場の挙動の複雑性を縮減させ得ることを示す。(Section 4)

2. 市場のモデル

ここでは Cournot 型の逆需要関数を拡張するとともに、これを出口([出口 2000], [Deguchi 2005])によって提案された「社会学習動学」(SLD: Social Learning Dynamics)に接合し、マイクロマクロ相互作用によって駆動される市場の動学を導出する。

2.1 需要と価格・費用の構造

Cournot 型の逆需要関数を、相互に競合のある m 種類のバリエーションをもつ財の価格と供給量の関係として拡張する。ここに市場の状態ベクトル $\mathbf{x}(t)=(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ の成分 x_i は市場へ出荷された第 i 種の量として定義する(T は転置を表す)。各エージェントは、各時点において常に財の 1 種類を選択して生産しているものとし、その生産性は全て 1 であると仮定する。更に、生産エージェントは充分多数存在するものとし、その総数を 1 に規格化する($\sum x_i=1$)。これにより、市場の状態量 $x_i(t)$ は、第 i 種の生産量であるとともに、第 i 種の生産を選択しているエージェントの集団内比率と同一視できる。

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{P}\mathbf{x} = (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P})\mathbf{x}, \quad (\mathbf{p}(\mathbf{x}))_i \geq 0 \quad \forall i, \quad (1)$$

$$\mathbf{p}_0 \equiv (\underbrace{p_{01}, \dots, p_{0m}}_m)^T, \quad \mathbf{P}_0 \equiv (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_0), \quad \mathbf{P} \equiv (P_{ij}) \in \mathbf{M}_{m \times m}.$$

式(1)において、第 i 要素が第 i の種類の市場単価を示す価格ベクトル \mathbf{p} を供給量ベクトル $\mathbf{x}(t)$ の線形非斉次な逆需要関数 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ として表わし、これにより価格平面が定義される。ここで、 p_0 は

連絡先: 國上真章, 筑波大学大学院ビジネス科学研究科,
東京都文京区大塚 3-29-1, kunigami@gssm.otsuka.tsukuba.ac.jp

価格平面の p -切片である。行列 $\mathbf{P}=\{P_{ij}\}$ は、 m 種のバリエーション内の競合関係を示し、 P_{ij} が負(正)の場合は第 j 種が第 i 種に対して正(負)の競合関係があることを意味する。ここで財が 1 単位しか市場に供給されない極限における使用価値は種類によらないと仮定すれば、非斉次項 \mathbf{p}_0 の要素はすべて同じ p_0 であるとみなせる。 \mathbf{x} が規格化されていることから $\mathbf{P}_0=(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_0)$ により逆需要関数 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ は線形斉次式で表される。

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C})\mathbf{x}, \quad (\mathbf{c}(\mathbf{x}))_i \geq 0 \quad \forall i, \quad (2)$$

$$\mathbf{c}_0 \equiv (\underbrace{c_0, \dots, c_0}_m)^T, \quad \mathbf{C}_0 \equiv (c_0, c_0, \dots, c_0), \quad \mathbf{C} \equiv (C_{ij}) \in \mathbf{M}_{m \times m}.$$

同様に財の単位生産費用を示す費用ベクトル \mathbf{c} を $\mathbf{x}(t)$ の線形非斉次な逆需要関数 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ として式(2)で表わす。行列 $\mathbf{C}=\{C_{ij}\}$ は、財のたとえば原料間等における競合・補完関係を示し、 C_{ij} が負(正)の場合は第 j 種が第 i 種に対して正(負)の競合関係があることを意味する。価格と同様に、非斉次項 \mathbf{c}_0 の要素はすべて同じ c_0 であるとみなすことができ、 $\mathbf{C}_0=(c_0, c_0, \dots, c_0)$ を用いて $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ は線形斉次式で表される。

ここで価格ベクトル $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 、費用ベクトル $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ 、利益ベクトルを定める定数ベクトル $\mathbf{p}_0, \mathbf{c}_0$ 、係数行列 \mathbf{P}, \mathbf{C} が満たすべき条件として、(a)状態ベクトル $\mathbf{x}(t)$ の取りうる値に対し価格、費用、収益の成分が全て常に正になること。また、経済的な尤もらしさを担保するため、(b)価格行列の対角成分は負であること、(c)価格行列及び費用行列の非対角成分は符号対称であることを要求する。(3)

$$(a) \quad p_i(\mathbf{x}) \geq c_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall i \quad \forall \mathbf{x},$$

$$(b) \quad P_{ii} \leq 0 \quad \forall i, \quad (3)$$

$$(c) \quad \text{sgn}(P_{ij}) = \text{sgn}(P_{ji}), \quad \text{sgn}(C_{ij}) = \text{sgn}(C_{ji}) \quad \forall i \quad \forall j.$$

2.2 エージェントの集会的な学習メカニズム

各にとって、価格費用の競合補完関係を正確に把握し、かつ無数の他エージェントの意思決定に最適に反応することは困難である。しかし現在価格・費用及び市場全体の平均収益等のマクロ情報は知り得てもよい。したがってこのような「限定合理的」エージェントがマクロ情報に基づいておこなうミクロな意思決定と、ミクロな意思決定の集積によるマクロ状態の変化(ミクロ-マクロ相互作用)を記述することが必要である。

このようなメカニズムとして、出口に([出口 2000], [Deguchi 2005])に従い社会学習動力学 SLD の定式化を行う。SLD においては、状態変数 x_i は、あるミクロな主体が社会的代替案 i を選択している確率であるとともに、社会において代替案 i が選択されている人口比率と同一視される。このため前節で拡張を行った価格-費用の定式化とそのまま接合することが出来る。

すなわち、市場の状態が \mathbf{x} であるときのマクロ状態量: 第 i 種の期待利益 $E_i(\mathbf{x})$ と、その市場平均 $W(\mathbf{x})$ は、前節における価格-費用の拡張から状態 \mathbf{x} の関数として表わすことができる(4)。

ここでエージェントの態度変更を記述する遷移確率 q_{ij} は主体が自身の生産対象を第 i 種から第 j 種へと(惰性或逡巡を克服して)変更する単位時間当たりの確率である。

$$E_i(\mathbf{x}) \equiv p_i(\mathbf{x}) - c_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C})\mathbf{x}_i, \quad W(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^m E_i(\mathbf{x})x_i, \quad (4)$$

$$q_{ij} \equiv \Pr(i \rightarrow j|i) = rx_j E_j(\mathbf{x}) / W(\mathbf{x}). \quad (5)$$

式(5)は、基本仮説であり、遷移確率 q_{ij} が j 種の相対利益 E_j/W と市場占有率 x_j の積に比例していることを示す。すなわち j 種の生産が有利であるほど、また周囲に j 種を生産する主体が多いほど、 j 種の生産に切替えるという態度変化が増加することを反映している。定数 r は所与の学習レートである。

SLD では、このような態度変更を「他のエージェントの平均利益に関する内部モデルが各エージェントによって形成され、それがされに学習されている」([出口 2000] p.97)とみなす。

基本仮説(5)のもと、態度変化の時間発展について連続極限をとると市場力学系(6)を得る。

$$\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} = \left\{ \sum_j q_{ji}(\mathbf{x})x_j - \sum_j q_{ij}(\mathbf{x})x_i \right\} = \frac{rx_i \{E_i(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x})\}}{W(\mathbf{x})},$$

$$\frac{dx_i}{dt} = rx_i \frac{((\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C})\mathbf{x})_i - \mathbf{x} \cdot (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C})\mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C})\mathbf{x}}. \quad (6)$$

3. 市場のカオス

市場動力学における内生的な複雑挙動として、市場構造の変化がカオスを発生させることを示す。RD においては、[Skyrms1997]が示したように4次元の場合にもカオスが発生し得るが、市場の SLD モデルとしては更に条件(3)が満たされている必要がある。

線形な価格・費用から構築できる市場動力学から取り出せる複雑な挙動の一例として、ここでは市場内の2つのセグメントが相互作用を強めていく過程を想定し、この過程で生産される財の種類が安定したひとつの市場で均衡に達するかわりに、複雑で予測不能な変動へと分岐する状況を示す。

式(7)は、(6)の市場を2つの内部セグメント($i=1 \sim m, i=m+1 \sim 2m$)に分けて考えられる場合について書き直したものである。同一市場内であるため式(7)の価格・費用行列のうち相互作用行列(\mathbf{P}, \mathbf{C})を各セグメント内部における価格費用の挙動を表現する行列($\mathbf{P}^s, \mathbf{C}^s$)及びこれら市場セグメント間の価格費用

$$\frac{dx_i}{dt} = rx_i \frac{(\mathbf{R}\mathbf{x})_i - \mathbf{x} \cdot \mathbf{R}\mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}\mathbf{x}} \quad (i=1, 2, \dots, 2m), \quad \sum_{i=1}^{2m} x_i(0) = 1, \quad (7)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P}^s + \mathbf{C}^s) + \gamma(\mathbf{P}^l + \mathbf{C}^l) \in \mathbf{M}_{2m \times 2m}.$$

の相互作用を表す($\mathbf{P}^l, \mathbf{C}^l$),さらにこれらを結合する定数 γ により形式的に分けて($\mathbf{P} = \mathbf{P}^s + \gamma \mathbf{P}^l, \mathbf{C} = \mathbf{C}^s + \gamma \mathbf{C}^l$)と表したものである。結合定数 $\gamma (>0)$ で市場内セグメント間の統合とその度合いを表し、 $\gamma=0$ ならば市場は各 m 種からなる内部セグメントが独立している状態を、 γ が大きいほど市場統合が進みセグメント間の相互作用が大きい状態を表す。

式(8)で与えられる数値例($m=2$)において価格-費用の構造が条件(3)を満たすことは明らかである。

この市場におけるカオス状態のアトラクタを Fig.4 に、また分岐図と対応する最大リアプノフ指数の変化を Fig.5 に示す。かなり広い γ の範囲において典型的な自己相似形の分岐パターンが

$$\mathbf{P}^s = \begin{pmatrix} -0.75 & -0.9 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.75 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^s = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.1 & 0 & 0 \\ -1.2 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 & -1 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.7 & -0.8 \\ -1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.9 \\ 0.4 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + (\mathbf{P}^s + \gamma \mathbf{P}^l) + (\mathbf{C}^s + \gamma \mathbf{C}^l)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.45 & -0.8 & 0 & 0 \\ 1.1 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.65 & 0.8 \\ 0 & 0 & -0.3 & -1.05 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.6 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & -1.7 \\ -1.4 & -0.3 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

発生していること、これに対応し最大リアプノフ指数が正の値へ遷移していくことが観察される。

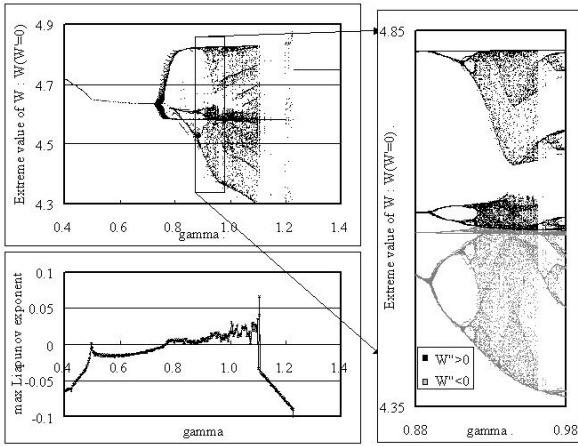


Fig.1:市場動力学(7)(8)における市場について平均収益 W の極値でとった分岐図(左上),分岐図に対応した最大リアブノフ指数の変化(左下),分岐図の一部の拡大図(右).

4. 複雑性の馴化

ここでは市場動力学に出現した複雑挙動に対し,カオス制御手法の適用による「馴化」を試みる. 複雑システムの制御として,集中制御と分散制御以外の第3の方向性として,市場から有効なマクロな観測量を嗅ぎ出して,簡単なメカニズムによって市場の複雑性を縮減させる制御([Kunigami 2003])が競争的市場におけるカオスの安定化にも有効となることを示す.

本研究では,連続カオス系の制御手法として「遅延フィードバック制御」([Pyragas 1992])の一種で,状態変数のピーク間隔から遅延時間を適応的に検出する「自己適応遅延時間フィードバック制御」([Kittel 1995]) (Fig.2)の適用を考える.

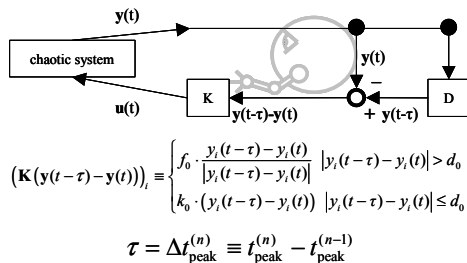


Fig.2:自己適応遅延時間フィードバック制御の考え方, $t_{\text{peak}}^{(n)}$ は観測量 y の n 番目のピーク時刻.

ただし「自己適応遅延時間フィードバック制御」では,遅延時間の短い成分に過敏でかえってシステムを不安定化させやすいこと,制御者にとって全く予想外の軌道が選択されることが多いことから,本研究ではこの「自己適応遅延時間フィードバック制御」に,ターゲットになる状態量と制御周期の双方に遅延時間の検出「窓」を設定し,制御者が限定した範囲で制御パラメータが選択されやすく改善を試みた.(Fig.3)

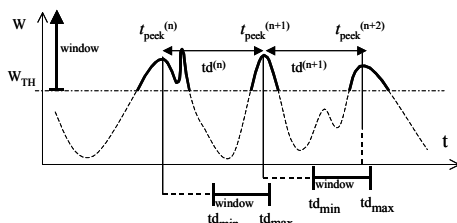
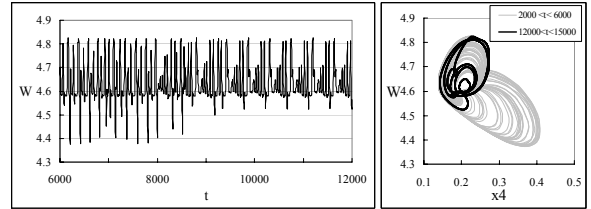


Fig.3:遅延時間の検出窓の考え方.

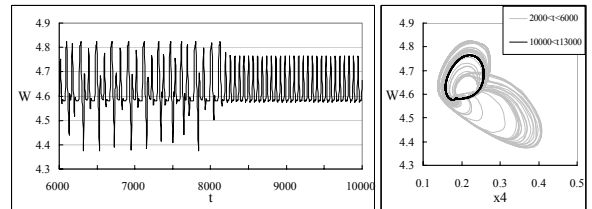
ここでは,市場の平均効用 W をターゲットになる状態量とし,所与の W_{TH} 以下のピークは検出しない.また遅延時間については,記憶限界により定まる td_{max} 以上のピーク間隔は検出せず, td_{min} 以下のピーク間隔は検出しても制御に反映しないものとする.この「窓付き自己適応遅延時間フィードバック制御」エージェントを用いてカオス的で予測不能な市場状態の複雑性を低減し「飼い馴らし」た例を Fig.4 に示す.



$\gamma = 0.96, r = 4$, start control at $t=8000$
Controller_1: $W_{\text{TH}} = 4.60, K=f_0 = 0.0001, D = 0.00005, \tau_{\text{min}} = 10.0, \tau_{\text{max}} = 80.0$.

Fig.4:制御の例,時系列(左)とアトラクタ(右)の制御による変化.

本制御方式では,複数の制御者が同時に並存することが可能である.異なる制御パラメータを持つ2つの「窓付き自己適応遅延時間フィードバック制御」エージェントがカオス市場を飼い馴らす例を Fig.5 に示す.



$\gamma = 0.96, r = 4$, start control at $t=8000$
Controller_1: $W_{\text{TH}} = 4.60, K=f_0 = 0.000025, D = 0.00001, \tau_{\text{min}} = 40.0, \tau_{\text{max}} = 80.0$.
Controller_2: $W_{\text{TH}} = 4.80, K=f_0 = 0.000025, D = 0.00001, \tau_{\text{min}} = 10.0, \tau_{\text{max}} = 40.0$.

Fig.5:制御の例,2体の制御者による同時制御.

1制御エージェントより低い制御ゲインでより安定した制御を実現しているように見えるが,エージェント数と制御性能の関係については更に検討を加える必要がある.

5. まとめ

本報告ではカオスの挙動を示す市場モデルを提案し,その挙動,安定性と馴化について議論した.本報告の主要な内容は以下のようにまとめられる.

- 複数のバリエーションが相互に競合性を持つ財に Cournot 型の逆需要関数を拡張し,無数の主体が生産に参入・退出する市場のモデルを,社会学習動学(Social Learning Dynamics)によりマイクロ-マクロ相互作用を含む市場動力学として構築した.(Section 2)
- 離散系のパイ捏ね変換によらず,線形な逆需要関数から導かれる連続力学系においても,市場が価格・費用構造の変化により市場として妥当な条件を満たす係数の範囲で,効率的な均衡を外れカオス状態に分岐してしまうリスクを持つことが示される.(Section 3)
- カオス制御手法である自己適応遅延時間フィードバック制御を適用することにより,カオス状態にある市場から安定化周期を取出すことにより,特に賢さを必要としない「牧羊犬」的なエージェントで「飼い馴らす」ことができる.(Section 4)

今後の課題としては,本研究の枠組みをリスク・マイニングの理論的な観点から拡張し,さまざまな市場リスクを分析するためのモデルを指向することが挙げられる.

謝辞

東京工業大学の出口弘先生,青森公立大学の小野崎保先生,ソニー研究所の高安秀樹先生には,特別講義・研究会における意見交換・質疑等を通じて貴重な御指摘・御意見をいただきました.この場を借りて御礼申し上げます.

参考文献

- [Deguchi 2005] H.Deguchi: "Economics as an Agent-Based Complex System", pp.19-23, Springer, 2005.
- [Hofbauer 1998] J.Hofbauer, K.Sigmund: "Evolutionary Games and Population Dynamics (2nd ed.)", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [Gibbons 1992] R.Gibbons: "Game Theory for Applied Economics", Princeton Univ. Press, pp14-21, 1992.
- [Kittel 1995] A.Kittel, J.Parisi, K.Pyragas: "Delayed feedback control of chaos by self-adapting delay time", Physics Letters A, Vol.198, pp.433-436, 1995.
- [Kopel 1991] M.Kopel: "Simple and Complex Adjustment Dynamics in Cournot Duopoly Models", Chaos Solitons and Fractals vol.7, pp.2031-48, 1991.
- [Kunigami 2003] M.Kunigami, T.Terano: "Connected Replicator Dynamics and Their Control in a Learning Multi-Agent System" In "Intelligent Data Engineering and Automated Learning", Liu,J., Cheung,Y., Yin,H.(eds.) LNCS, Vol.2690. Springer, pp.18-26, 2003.
- [Puu 1991] T.Puu: "Chaos in Duopoly Pricing", Chaos Solitons and Fractals, vol.1, pp.573-581, 1991.
- [Puu 2003] T.Puu, I.Sushko: "Oligopoly Dynamics", Springer, 2003.
- [Pyragas 1992] K.Pyragas: "Continuous control of chaos by selfcontrolling feedback", Physics Letters A, Vol.170 No.6, pp.421-428, 1992.
- [Skyrms 1997] B.Skyrms: "Chaos and the explanatory significance of equilibrium: Strange attractors in evolutionary game dynamics" In "The Dynamics of Norms", C. Bicchieri et al. (eds.) 199-222, Cambridge Univ. press, 1997.
- [出口 2000] 出口弘:「複雑系としての経済学」, 日科技連, 2000.