

万能セルオートマトンルール 110 における $1/f$ ゆらぎ

$1/f$ Noise in Universal Cellular Automaton Rule 110

蜷川 繁

Shigeru Ninagawa

金沢工業大学 工学部 情報工学科

Division of Information and Computer Science, Kanazawa Institute of Technology

There are distinct 88 rules in elementary (one-dimensional two-state three-neighbor) cellular automata. We performed spectral analysis of elementary cellular automata starting from random initial configuration. As a result rule 110 shows $1/f$ noise where the power is inversely proportional to the frequency. The cause of $1/f$ noise in rule 110 is the transient behavior which is the interaction between gliders propagating in the periodic background. On the other hand, rule 110 is proved to be capable of supporting universal computation. This result suggests that there is a relationship between computational universality and $1/f$ noise in cellular automata.

1. はじめに

セルオートマトン (Cellular Automaton, CA) は d 次元格子空間にセルと呼ばれる同一の有限オートマトンが配置された大自由度離散力学系である。セルがとり得る状態の集合を Q とすると、近傍と呼ばれる n 個のセルの状態から状態遷移関数 $\delta: Q^n \rightarrow Q$ によって、次のステップでのセルの状態が決まる。状態遷移はすべてのセルにおいて同期して起こる。あるステップにおける全セルの状態の配列を様相とよぶ。CA においては、初期様相から別の様相へと状態遷移する過程を、適切に解釈することにより、計算過程とみなすことができることから、CA は計算機能をそなえた力学系であるといえる。すべてのアルゴリズムを実行可能である性質を計算万能性とよび、計算万能性を備えた CA を万能 CA とよぶことにする。万能 CA は von Neumann によって 2 次元 29 状態 5 近傍 CA として与えられ [von Neumann 66]、さらに Codd により 8 状態にまで減らされた [Codd 68]。これらの CA は、はじめから計算万能性を目指して設計されているため、明らかに途中で生起しないような近傍状態に対して状態遷移関数は定義されていない。つまり δ は部分関数になっている。

2 次元 2 状態 9 近傍 CA の一種であるライフゲーム [Berlekamp 82] には、セル平面上を伝播する「グライダー」と呼ばれるパターンがあり、グライダー列をデジタル信号とみなすことにより、セル平面上に論理演算回路やレジスタ等を構成できる。このことから、じゅうぶん広いセル平面上では汎用コンピュータを作ることができると予想されている。ライフゲームの状態遷移関数は全域関数なので、どのような様相においても状態遷移が可能である。そこで、ライフゲームにおいて、ランダムな初期様相から状態遷移させ、セルの時系列データからパワースペクトルを求めると、 $1/f$ ゆらぎとよばれる特徴的なふるまいを示す [Ninagawa 98]。

以上のことから、CA における $1/f$ ゆらぎと計算万能性との間には何らかの関連性があることが予想される。本研究では、単純 CA (Elementary CA, ECA) と呼ばれる、 $d = 1$ 、 $Q = \{0, 1\}$ 、隣接した 3 つのセルを近傍とする ($n = 3$) CA において $1/f$ ゆらぎを示すものを調べた。

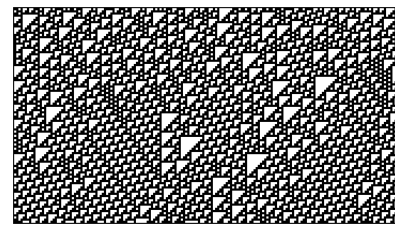


図 1: ランダム初期様相の場合のルール 110 の時空間パターン。セル数は 180, ステップ数は 100。

2. 単純セルオートマトンのスペクトル解析

ECA は全部で $2^3 = 256$ 種類あるが、左右の置換、0 と 1 の置換、およびそれらを組み合わせた置換に対して等価な CA を除くと、独立なものは全部で 88 個ある [Li 90]。例えば次の状態遷移関数を考える。横線の上は近傍の状態を表し、横線の下は中央のセルの次のステップでの状態を表す。

$$\begin{array}{cccccccc} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (1)$$

この状態遷移関数を 8 けたの 2 進数とみなすことにより、この ECA をルール 110 とよぶ。1 次元 CA の様相の変化を図示するために、セルの状態を異なる色で表したマス目を横に並び、さらに各ステップの様相を上から下へと縦に並べることで、様相の変化を 2 次元パターンとして表現したものを時空間パターンとよぶ。ルール 110 の時空間パターンを図 1 に示す。白、黒のマス目はそれぞれ状態 0, 1 のセルを表している。本研究では、初期様相として、状態 0, 1 が等確率で出現するようにランダムに生成し、周期境界条件 (periodic boundary conditions) を用いている。

N 個のセルからなる 1 次元 CA において、 i 番目のセルの t ステップ目の状態を $x_i(t)$ とする。 $t = 0, 1, \dots, T-1$ の T 個の時系列データに対して次の式 (2) で定義されるフーリエ変換を施す。

$$\hat{x}_i(f) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x_i(t) \exp(-i \frac{2\pi t f}{T}), \quad (f = 0, 1, \dots, T-1). \quad (2)$$

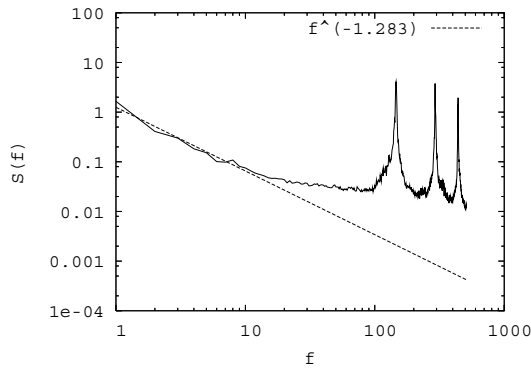


図 2: ルール 110 のパワースペクトル．セル数は 500，ランダム初期様相から 1024 ステップにわたって測定した．点線は $f = 1 \sim 10$ にわたり最小二乗法で求めた直線 $\ln S(f) = \alpha + \beta \ln f$, $\beta = -1.283$ を表す．

これを次の式 (3) のように全セルにわたって和をとったものを，パワー $S(f)$ とする．

$$S(f) = \sum_i |\hat{x}_i(f)|^2. \quad (3)$$

セル数が 500, $T = 1024$ の場合のルール 110 のパワースペクトルを図 2 に示す．ルール 110 には，周期的背景 (periodic background) とよばれる周期 7 のパターンが存在することから， $f = 146$ にピークを持ち， $f = 292$ と $f = 440$ のピークはそれぞれ第 2 次，第 3 次高調波である．図中の点線はこのパワースペクトルの $f = 1 \sim 10$ の周波数域において，最小二乗法を用いて $\ln S(f) = \alpha + \beta \ln f$ と近似したときの直線をあらわしている．このパワースペクトルでは $\beta = -1.283$ となり，低周波域ではパワー $S(f)$ が周波数 f に反比例していることがわかる．このようなパワースペクトルを示すゆらぎを $1/f$ ゆらぎとよぶ． $1/f$ ゆらぎは真空管電圧において発見され，その後，半導体や宇宙線強度のほか，ヒトの眼球運動や高速道路での交通量の変動など幅広い分野において観測されているが，未だにその発生のメカニズムは明らかにされていない [Musha 77]．

3. ルール 110 における $1/f$ ゆらぎ

一般に，低周波域になるほど高いパワーをもつことから，時間的変動において，きわめて長期にわたる相関があることを示している．したがって $1/f$ ゆらぎでは，とくに低周波域におけるパワースペクトルの振る舞いが重要になる．そこでルール 110 においてステップ数 T を変化させた場合に，パワースペクトルの傾き β がどのように変化するかを調べた．それぞれの N と T の場合に，ランダムに生成した 400 通りの初期様相について $f = 1 \sim 10$ の周波数域において， β の平均値 $\langle \beta \rangle$ を求めた結果を図 3 に示す．これより，一般に測定ステップ数 T が大きくなるにつれ， β はより大きな値になることがわかる．これはパワースペクトルの傾きが平らになることを意味する．一般に，CA においては，セル数が有限で，今回用いている周期的境界条件のような決定性の境界条件の場合，過渡的な様相の変化を経て，最終的には周期的な様相になる．CA における $1/f$ ゆらぎの原因は過渡的な様相の変化であると考えられるので，測定ステップ数 T を大きくするにつれて，パワースペクトルが $1/f$ からずれて，平らになると考えられる．

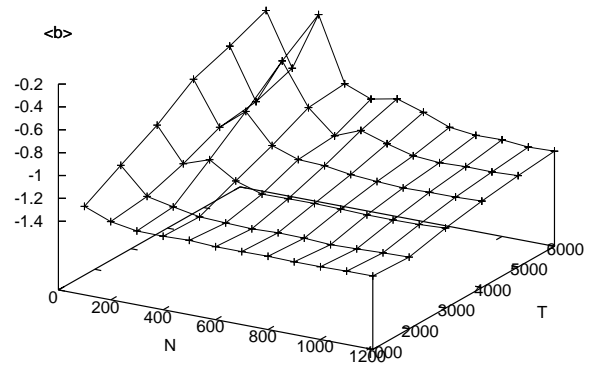


図 3: ルール 110 におけるパワースペクトルの傾き β の平均値のセル数 N およびステップ数 T に対する依存性．

図 3 では， $N = 200$ のとき， $N = 100$ や $N = 300$ の場合にくらべて $\langle \beta \rangle$ は小さい値になっている．これは，上述のことから， $N = 200$ の場合に過渡状態が長くなることを意味している．セル数が多くない場合はこのような特異な振る舞いが現れやすいと思われる．

$1/f$ ゆらぎの原因は過渡的な様相の変化であるという予想を裏付けるために， $N = 200$ の 2 通りのランダム初期様相を用いて $T = 1000$ ステップにわたり状態遷移させた場合の $t = 800 \sim 999$ までの時空間パターンとその時のパワースペクトルを図 4, 5 にそれぞれ示す．図中の点線は $f = 1 \sim 10$ において最小二乗法で求めた直線 $\ln S(f) = \alpha + \beta \ln f$ を表す．

図 4 上の時空間パターンをみると，グライダーが左に移動しているだけの周期的な様相になっている．それに対応する図 4 下のパワースペクトルでは $\beta = -0.5059$ であり， $1/f$ ゆらぎといえない．それに対し，図 5 上の時空間パターンではグライダー同士が相互作用している過渡的な様相となっており，それに対応した図 5 下のパワースペクトルでは $\beta = -1.5159$ となり， $1/f$ ゆらぎを示している．この結果は過渡的な様相の変化が $1/f$ ゆらぎの原因になっているという上述の予想を裏付けている．さらにこの結果から，過渡状態の要因の 1 つとしてグライダー同士の相互作用が重要であることがわかる．

4. 考察

Langton はカオスの縁 (Edge of Chaos) 仮説において，規則的な振る舞いをするクラス 1 や 2 と，カオス的な振る舞いをするクラス 3 との相転移上に，複雑な振る舞いをするクラス 4 が存在し，クラス 4 に属する CA は計算万能性を有すると予想している [Langton 90]．ECA の中では，ルール 110 は計算万能性を備えていることが証明されている [Wolfram 02, Cook 04]．いっぽう，ECA においてルール 110 が $1/f$ ゆらぎを示すことから，CA において $1/f$ ゆらぎと計算万能性との間には何らかの関連性があるのではないかと予想される．このことは， $1/f$ ゆらぎをもたらすようなダイナミクスと計算万能性に必要なダイナミクスとはきわめて近い関係にあることを示唆している．

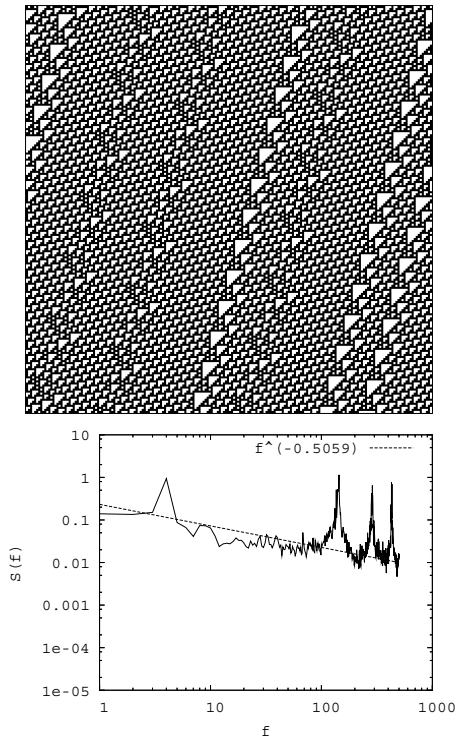


図 4: ルール 110 における $t = 800$ から $t = 999$ までの時空間パターン (上) と $t = 0$ から $t = 999$ までのパワースペクトル (下). セル数は 200 . パワースペクトル中の点線は $f = 1 \sim 10$ にわたり最小二乗法で求めた直線 $\ln S(f) = \alpha + \beta \ln f, \beta = -0.5059$ を表す .

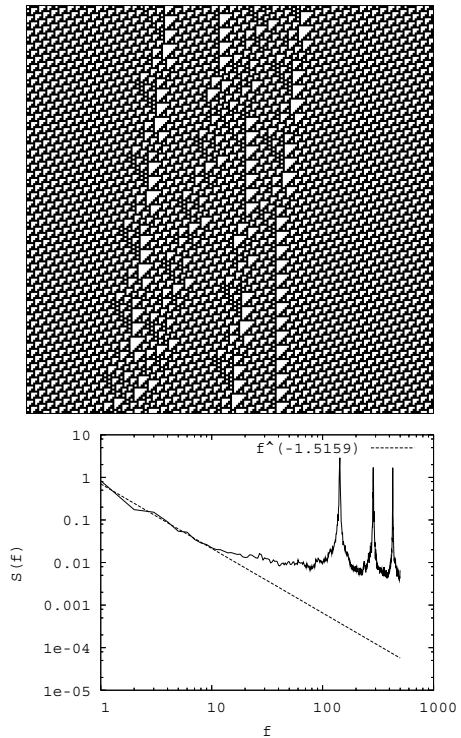


図 5: ルール 110 における $t = 800$ から $t = 999$ までの時空間パターン (上) と $t = 0$ から $t = 999$ までのパワースペクトル (下) . セル数は 200 . 図 4. とは異なる初期様相を用いた . パワースペクトル中の点線は $f = 1 \sim 10$ にわたり最小二乗法で求めた直線 $\ln S(f) = \alpha + \beta \ln f, \beta = -1.5159$ を表す .

5. おわりに

本研究では, ECA においてルール 110 が $1/f$ を示し, その原因がグライダー間の相互作用による過渡的な状態遷移であることを示した. いっぽう, ルール 110 は計算万能性をもつことが証明されている. 計算万能性をもち, $1/f$ ゆらぎを示すライフゲームにおいても, グライダーが存在することから, 一般にセルオートマトンにおけるグライダーの存在が計算万能性および $1/f$ ゆらぎの重要な要因となっていると予想される. 今後はより広いルール空間からなる 1 次元 2 状態 5 近傍 CA において $1/f$ ゆらぎを示す遷移規則を探索する予定である.

参考文献

- [von Neumann 66] von Neumann J.: Theory of Self-Reproducing Automata (completed and edited by A. Burks), Univ. of Illinois Press (1966), (邦訳: J. フォンノイマン著 A.W. パークス編補 高橋秀俊監訳: 自己増殖オートマトンの理論, 岩波書店 (1975)).
- [Codd 68] Codd, E. F.: Cellular Automata, Academic Press (1968).
- [Berlekamp 82] Berlekamp, E. R., Conway, J. H., and Guy, R. K.: Winning ways for your mathematical plays, Vol.2, Academic Press (1982).

- [Ningawa 98] Ningawa, S., Yoneda, M., and Hirose, S.: $1/f$ fluctuation in the "Game of Life", Physica D, Vol.118, pp. 49 - 52 (1998).
- [Li 90] Li, W and Packard, N: The Structure of the Elementary Cellular Automata Rule Space, Complex Systems, Vol.4, pp. 281 - 297 (1990).
- [Musha 77] 武者 利光: $1/f$ ゆらぎ, 応用物理, Vol.46, pp. 1144 - 1155 (1977).
- [Langton 90] Langton, C. G.: Computation at the Edge of Chaos: Phase Transitions and Emergent Computation, Physica D, Vol.42, pp. 12 - 37 (1990).
- [Wolfram 02] Wolfram, S.: A New Kind of Science, Wolfram Media (2002).
- [Cook 04] Cook, M.: Universality in Elementary Cellular Automata, Complex Systems, Vol. 15, pp. 1 - 40 (2004).